

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие предназначено для оказания помощи студентам строительных специальностей вузов при выполнении расчётно-графических работ по сопротивлению материалов, основам строительной механики (для специальностей ВиВ, ТГВ и СТ) и теории упругости и пластичности.

Пособие состоит из 3-х частей и 14 глав по темам расчётно-графических работ. Каждая глава содержит краткое изложение теории, где приведены основные формулы и уравнения, и примеры решения задач, аналогичных задачам в расчётно-графических работах.

В конце каждой части пособия приведен сортамент стальных прокатных стержней – уголков, двутавров и швеллеров.

Во второй части пособия приведены главы, соответствующие учебному материалу 2-го семестра изучения сопротивления материалов – определение перемещений в балках и рамах при прямом изгибе, расчет статически неопределимых балок и рам с помощью метода сил, расчет балок на упругом основании, кручение стержней, сложное сопротивление стержней, устойчивость и продольно-поперечный изгиб стержней.

Пособие написано профессорами кафедры сопротивления материалов МГСУ. Большую помощь при написании и подготовке к изданию учебного пособия оказали авторам коллеги по кафедре – профессора О.В.Мкртычев, А.Г.Паушкин, доценты А.Я.Астахова, А.В. Ильяшенко.

В пособии использована система единиц СИ, а также традиционные для курса сопротивления материалов обозначения: сила –  $P$ , площадь поперечного сечения стержня –  $F$ . Соотношения между основными механическими величинами в единицах СИ и в технической системе приведены в следующей таблице:

Наименование величины	Е д и н и ц а		Соотношение единиц
	Наименование	Обозначение	
Сила, нагрузка, вес	Ньютон	Н	$1\text{Н} \approx 0,1 \text{ кгс}$ $1\text{кН} \approx 0,1\text{тс}$
Линейная нагрузка	Ньютон на метр	Н/м	$1\text{Н/м} \approx 0,1\text{кгс/м}$ $1\text{кН/м} \approx 0,1\text{тс/м}$
Момент силы, момент пары сил	Ньютон-метр	Нм	$1\text{Нм} \approx 0,1\text{кгс}\cdot\text{м}$ $1\text{кНм} \approx 0,1\text{тс}\cdot\text{м}$
Напряжение, давление	Паскаль	Па	$1\text{Па} \approx 0,1\text{кгс/м}^2$ $1\text{МПа} \approx 10\text{кгс/см}^2$

При определении напряжений в качестве вспомогательной единицы измерения используется также  $\text{кН/см}^2$  ( $1 \text{ кН/см}^2 = 10 \text{ МПа}$ ).

## ГЛАВА 5

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ И РАМАХ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

#### 5.1. Основные определения и формулы

При изгибе ось балки искривляется (рис.5.1), что сопровождается появлением прогибов  $v(x)$  и углов поворота поперечных сечений  $\varphi(x) = v'(x)$ , которые принимаются равными углом наклона касательной к изогнутой оси. Эти величины называются линейными и угловыми перемещениями.

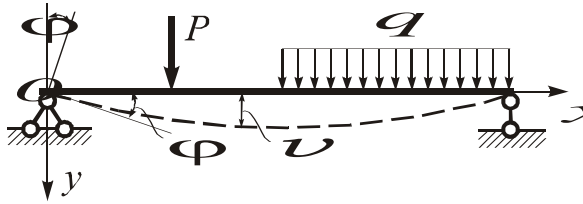


Рис.5.1

Прогибы считаются положительными, если они происходят в положительном направлении оси  $Oy$ . Углы поворота считаются положительными при повороте касательной к изогнутой оси по ходу часовой стрелки.

Для определения законов изменения прогибов балок  $v(x)$  при прямом изгибе используются дифференциальные уравнения второго порядка

$$EJv''(x) = -M(x), \quad (5.1)$$

или четвёртого порядка

$$EJv^{IV}(x) = q(x), \quad (5.2)$$

где  $EJ$  – жёсткость балки при изгибе,  $M(x)$  – изгибающий момент в поперечном сечении,  $q(x)$  – распределённая поперечная нагрузка.

При определении перемещений с помощью метода начальных параметров используется выражение

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} \Big|_1 + \Delta\varphi(x - a_1) \Big|_2 - \frac{M(x - a_2)^2}{2! EJ} \Big|_3 - \frac{P(x - a_3)^3}{3! EJ} \Big|_4 + \frac{q(x - a_4)^4}{4! EJ} \Big|_5 - \frac{q(x - a_5)^4}{4! EJ} \Big|_6. \quad (5.3)$$

Здесь  $v_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $M_0$ ,  $Q_0$  – начальные параметры, представляющие собой прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечную силу в начальном сечении  $x = 0$  и  $\Delta\varphi$  – взаимный угол поворота сечений в промежуточном шарнире. Формула (5.3) соответствует воздействиям и участкам, показанным на рис.5.2.

Неизвестные в начале расчёта начальные параметры и величины  $\Delta\varphi$  подлежат определению из соответствующих граничных условий.

Общим методом определения перемещений в стержневых системах является метод Мора. Метод Мора сводится к вычислению интегралов, которые представляют собой работу единичных сил  $\bar{P} = 1$  или единичных моментов  $\bar{M} = 1$  на искомах перемещениях.

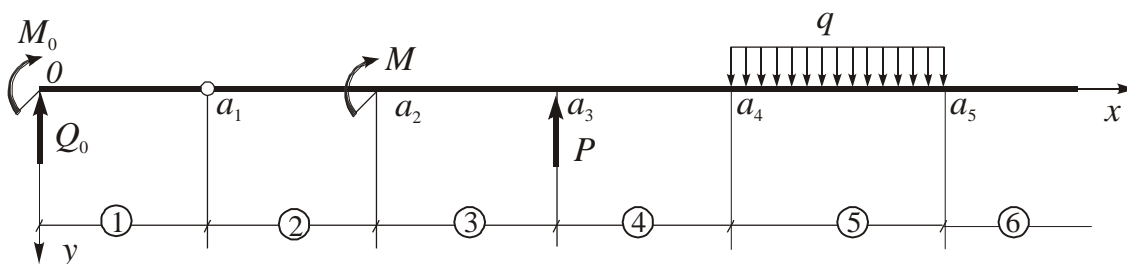


Рис.5.2

Для балок и рам используется формула Мора, содержащая изгибающие моменты:

$$\Delta_{iP} = \sum_k \int_{s_k} \frac{\bar{M}_i M_P}{EJ} ds. \quad (5.4)$$

Здесь  $\bar{M}_i$  – изгибающий момент от действия единичной силы или единичного момента, прикладываемых по направлению искомого перемещения;  $M_P$  – изгибающий момент от действия заданных нагрузок. При определении линейных перемещений прикладывается единичная сила, а при определении угловых перемещений – единичный момент.

Для балок и стержневых систем, состоящих из прямых стержней с постоянной жёсткостью  $EJ$ , вычисление интегралов Мора можно произвести с помощью правила А.К.Верещагина (правило «перемножения» эпюр) по формуле

$$\Delta_{iP} = \sum_k \int_{s_k} \frac{\bar{M}_i M_P}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} y_C \Omega_P, \quad (5.5)$$

где  $y_C$  – ордината в линейной эпюре  $\bar{M}_i$  под центром тяжести площади  $\Omega_P$  криволинейной эпюры  $M_P$  (рис.5.3).

При использовании формулы (5.5) сложную эпюру надо разбить на простые фигуры, у которых известны площадь и положение центра тяжести. Наиболее часто элементами разбиения являются трапеции и квадратные параболы. Площадь квадратной параболы на участке длиной  $l$  с нулевыми начальным и конечным значениями определяется по формуле

$$\Omega_q = \frac{ql^3}{12}, \quad (5.6)$$

где  $q$  – интенсивность равномерно распределённой нагрузки.

Если эпюры  $M_P$  и  $\bar{M}_i$  на участке длиной  $l$  представляют собой трапеции (рис.5.4), то формулу (5.5) можно привести к следующему виду (формула «перемножения» трапеций):

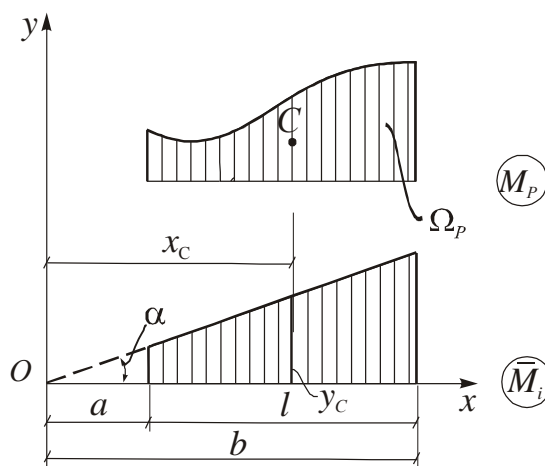


Рис.5.3

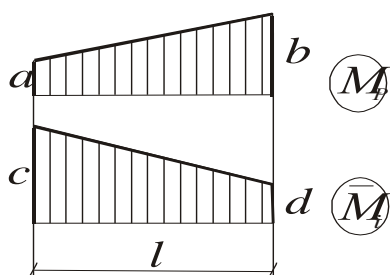


Рис.5.4

$$\Delta_{iP} = \frac{l}{6EJ} (2ac + 2bd + ad + bc) . \quad (5.7)$$

Если интеграл Мора имеет положительное значение, то направление перемещения совпадает с направлением действия соответствующих единичной силы или единичного момента. В противном случае перемещение противоположно этому направлению.

## 5.2. Примеры решения задач

### Задача 5.1.

Для шарнирно опертой балки (рис.5.5,а) построим эпюры  $Q$  и  $M$  и выполним подбор сечения из условия прочности в виде стального прокатного двутавра. Определим с помощью метода начальных параметров и метода Мора

значения прогибов и углов поворота в характерных сечениях балки и построим эпюры  $v$  и  $\varphi$ . Определим числовые значения  $v$  и  $\varphi$ . В расчетах примем  $R = 21 \text{ кН/см}^2$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$ ,  $\gamma_f = 1,2$  и  $\gamma_c = 0,9$ .

Определяем опорные реакции:

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0, \quad 10 - 15 \cdot 1 - 10 \cdot 3 \cdot 2,5 + 4R_B = 0, \quad R_B = 20 \text{ кН}; \\ \Sigma M_B = 0, \quad 10 + 15 \cdot 3 + 10 \cdot 3 \cdot 1,5 - 4R_A = 0, \quad R_A = 25 \text{ кН}; \\ \Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, \quad 15 + 10 \cdot 3 - 25 - 20 = 45 - 45 = 0. \end{aligned}$$

Определяем значения изгибающих моментов и поперечных сил в характерных сечениях балки и строим эпюры  $Q$  и  $M$  (рис.5.5,б,в). Определяем экстремальное значение  $M_{\max}$  в пролете. Из пропорции находим положение сечения, где действует максимальный момент.

$$\frac{20}{x_0} = \frac{10}{3 - x_0}, \quad x_0 = 2 \text{ м};$$

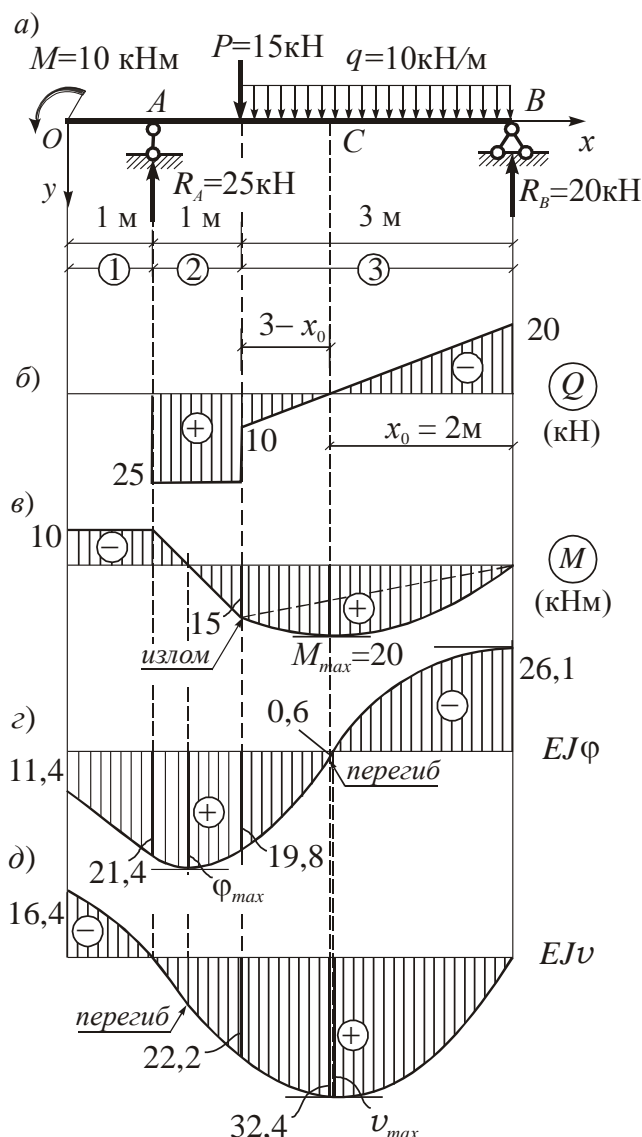


Рис.5.5

$$M_{max} = M_C = 20 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 20 \text{ кНм}.$$

Определяем расчетное значение наибольшего изгибающего момента.

$$M_p = M_n \gamma_f = 20 \cdot 1,2 = 24 \text{ кНм}.$$

Требуемый момент сопротивления сечения равен:

$$W_z \geq \frac{M_p}{\gamma_c R} = \frac{24 \cdot 10^2}{0,9 \cdot 21} = 127 \text{ см}^3.$$

По сортаменту принимаем:  $\text{I} 18$ ,  $W_z = 143 \text{ см}^3$ ,  $J_z = 1290 \text{ см}^4$ .

Составим с помощью формулы (5.3) выражение для прогиба балки в пределах трех характерных участков.

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} \Big|_1 - \frac{R_A (x-1)^3}{3! EJ} \Big|_2 + \frac{P(x-2)^3}{3! EJ} + \frac{q(x-2)^4}{4! EJ} \Big|_3.$$

Начальные параметры равны:

$$x = 0, \quad M_0 = -10 \text{ кНм}, \quad Q_0 = 0.$$

Для определения неизвестных начальных параметров  $v_0$  и  $\varphi_0$  используем граничные условия:

$$x = 1 \text{ м}, \quad v = v_0 + 1 \cdot \varphi_0 + \frac{10 \cdot 1^2}{2 EJ} = 0;$$

$$x = 5 \text{ м}, \quad v = v_0 + 5\varphi_0 + \frac{10 \cdot 5^2}{2 EJ} - \frac{25 \cdot 4^3}{6 EJ} + \frac{15 \cdot 3^3}{6 EJ} + \frac{10 \cdot 3^4}{24 EJ} = 0.$$

Решаем систему алгебраических уравнений.

$$\left. \begin{aligned} v_0 + \varphi_0 &= -\frac{5}{EJ}, \\ v_0 + 5\varphi_0 &= \frac{40,42}{EJ}. \end{aligned} \right\} \quad v_0 = -\frac{16,4}{EJ}, \quad \varphi_0 = \frac{11,4}{EJ}.$$

В качестве проверки вычислим значения  $v_0$  и  $\varphi_0$  с помощью метода Мора. Построим единичные эпюры изгибающих моментов (рис.5.6, а, б) и вычислим интегралы Мора с помощью правила А.К. Верещагина, то есть «перемножим» единичные эпюры с эпюрой моментов от действия заданных нагрузок  $M = M_p$ .

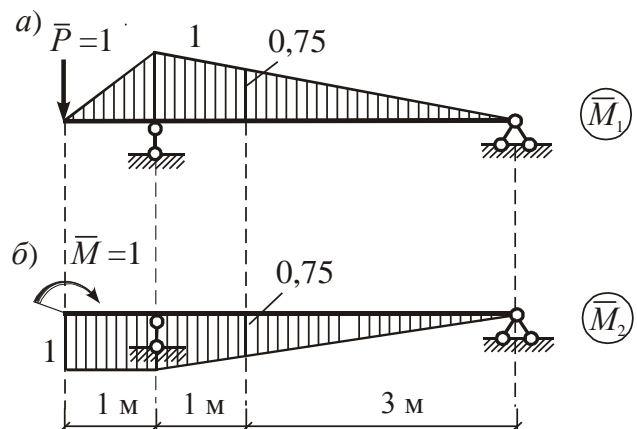


Рис.5.6

$$v_0 = \int_0^l \frac{\overline{M}_1 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 + \frac{1}{6} (2 \cdot 1 \cdot 10 - 2 \cdot 0,75 \cdot 15 + \right. \\ \left. + 10 \cdot 0,75 - 15 \cdot 1) - \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 - \frac{10 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,75 \right] = -\frac{16,35}{EJ};$$

$$\varphi_0 = \int_0^l \frac{\overline{M}_2 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[ -10 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{6} (-2 \cdot 10 \cdot 1 + 2 \cdot 15 \cdot 0,75 - \right. \\ \left. - 10 \cdot 0,75 + 15 \cdot 1) + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 + \frac{10 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,75 \right] = \frac{11,35}{EJ}.$$

Результаты определения  $v_0$  и  $\varphi_0$  с помощью метода начальных параметров и метода Мора практически совпали. Запишем окончательные выражения для  $v(x)$  и  $\varphi(x)$ .

$$v(x) = \frac{1}{EJ} \left[ -16,4 + 11,4x + \frac{10x^2}{2!} \Big|_1 - \frac{25(x-1)^3}{3!} \Big|_2 + \frac{15(x-2)^3}{3!} + \frac{10(x-2)^4}{4!} \Big|_3 \right];$$

$$\varphi(x) = v'(x) = \frac{1}{EJ} \left[ 11,4 + 10x \Big|_1 - \frac{25(x-1)^2}{2!} \Big|_2 + \frac{15(x-2)^2}{2!} + \frac{10(x-2)^3}{3!} \Big|_3 \right].$$

Вычислим значения  $v$  и  $\varphi$  в характерных сечениях балки.

$$x=0, \quad v=v_0 = -\frac{16,4}{EJ}, \quad \varphi = \varphi_0 = \frac{11,4}{EJ};$$

$$x=1 \text{ м}, \quad v=0 \text{ (граничное условие)}, \quad \varphi = \frac{1}{EJ} (11,4 + 10 \cdot 1) = \frac{21,4}{EJ};$$

$$x=2 \text{ м}, \quad v = \frac{1}{EJ} \left( -16,4 + 11,4 \cdot 2 + \frac{10 \cdot 2^2}{2} - \frac{25 \cdot 1^3}{6} \right) = \frac{22,2}{EJ},$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left( 11,4 + 10 \cdot 2 - \frac{25 \cdot 1^2}{2} \right) = \frac{18,9}{EJ};$$

$$x=3 \text{ м}, \quad v = \frac{1}{EJ} \left( -16,4 + 11,4 \cdot 3 + \frac{10 \cdot 3^2}{2} - \frac{25 \cdot 2^3}{6} + \frac{15 \cdot 1^3}{6} + \frac{10 \cdot 1^4}{24} \right) = \frac{32,4}{EJ},$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left( 11,4 + 10 \cdot 3 - \frac{25 \cdot 2^2}{2} + \frac{15 \cdot 1^2}{2} + \frac{10 \cdot 1^3}{6} \right) = \frac{0,6}{EJ};$$

$$x=5 \text{ м}, \quad v=0 \text{ (граничное условие)},$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left( 11,4 + 10 \cdot 5 - \frac{25 \cdot 4^2}{2} + \frac{15 \cdot 3^2}{2} + \frac{10 \cdot 3^3}{6} \right) = -\frac{26,1}{EJ}.$$

В качестве проверки вычислим некоторые значения  $v$  и  $\varphi$  с помощью метода Мора. Соответствующие единичные эпюры приведены на рис.5.7, а, б.

$$v(2) = \int_0^l \frac{\bar{M}_3 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{6} (2 \cdot 15 \cdot 0,75 - 10 \cdot 0,75) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} 15 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 0,75 + \frac{10 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 0,75 \right] = \frac{22,19}{EJ};$$

$$\varphi(5) = \int_0^l \frac{\bar{M}_4 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{6} (-2 \cdot 15 \cdot 0,25 + 10 \cdot 0,25) - \right. \\ \left. - \frac{3}{6} (2 \cdot 15 \cdot 0,25 + 15 \cdot 1) - \frac{10 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1 + 0,25}{2} \right] = -\frac{26,15}{EJ}.$$

Результаты вычислений практически совпали. Строим эпюры  $v$  и  $\varphi$ , отметив их особенности (рис.5.5, з, д). Ординаты эпюр умножены на жесткость  $EJ$ .

В сечении, где  $Q$  обращается в нуль, на эпюре  $\varphi$  имеется точка перегиба. В сечении, где  $M = 0$  (участок 2), на эпюре  $\varphi$  имеется экстремум  $\varphi_{max}$ , а на эпюре  $v$  – точка перегиба. В сечении, где  $\varphi = 0$  (участок 3), прогиб имеет экстремальное значение  $v_{max}$ .

В пределах участка 1  $\varphi$  изменяется по линейному закону. В сечении  $B$  касательная к эпюре  $\varphi$  параллельна оси.

Определим числовые значения  $v$  и  $\varphi$ . Размерность длины в числителе переведем в сантиметры.

$$v(3) = \frac{32,4}{EJ} = \frac{32,4 \cdot (10^2)^3}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 1290} = 1,2 \text{ см};$$

$$\varphi(5) = -\frac{26,1}{EJ} = -\frac{26,1 \cdot (10^2)^2}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 1290} = -0,00963 \text{ рад} = -0,55^\circ.$$

### Задача 5.2.

Для балки с промежуточным шарниром (рис.5.8,а) определим значения поперечных сил, изгибающих моментов, прогибов и углов поворота в характерных сечениях и построим эпюры этих величин.

Разбиваем балку на несомую  $BC$  и несущую  $AB$  части (балки). Производим статический расчет несомой балки  $BC$  (рис.5.8,б).

$$\begin{aligned} \Sigma M_B = 0, & \quad -14 \cdot 3 \cdot 1,5 - 12 + 5R_C = 0, & R_C = 15 \text{ кН}; \\ \Sigma M_C = 0, & \quad 14 \cdot 3 \cdot 3,5 - 12 - 5R_B = 0, & R_B = 27 \text{ кН}; \\ \Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, & \quad 14 \cdot 3 - 27 - 15 = 42 - 42 = 0. \end{aligned}$$

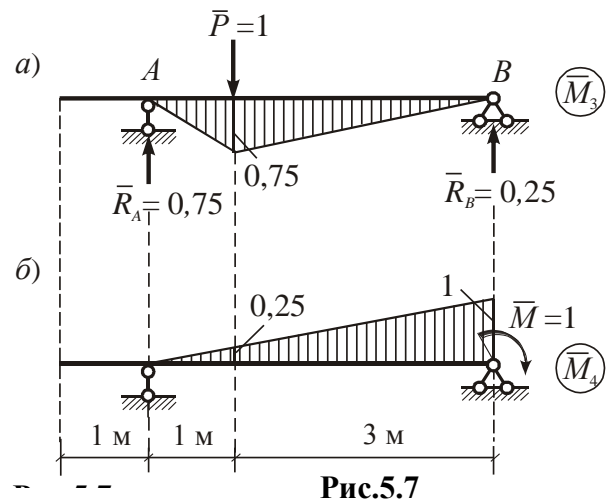


Рис.5.7

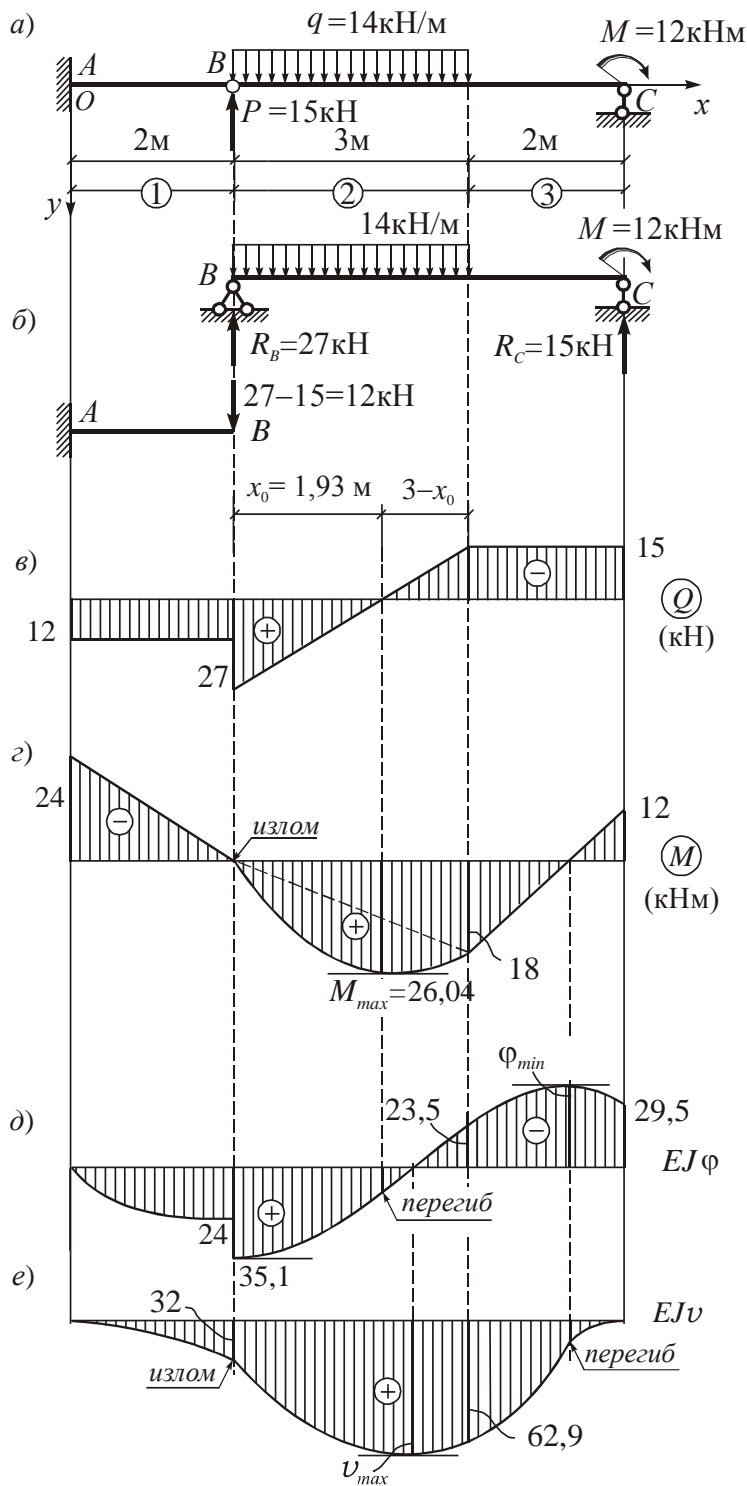


Рис.5.8

Эпюры  $Q$  и  $M$  приведены на рис.5.8, в, г. Определяем экстремальное значение изгибающего момента в пролете  $BC$ .

$$\frac{27}{x_0} = \frac{15}{3 - x_0}, \quad x_0 = 1,93 \text{ м};$$

$$M_{\max} = 27 \cdot 1,93 - \frac{14 \cdot 1,93^2}{2} = 26,04 \text{ кНм}.$$

Запишем выражение для прогиба балки с помощью метода начальных параметров.

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} \Big|_1 + \Delta\varphi_B (x - 2) - \frac{P(x - 2)^3}{3! EJ} + \frac{q(x - 2)^4}{4! EJ} \Big|_2 - \frac{q(x - 5)^4}{4! EJ} \Big|_3.$$

Начальные параметры равны:

$$x = 0, \quad v_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \\ M_0 = -24 \text{ кНм}, \quad Q_0 = 12 \text{ кН}.$$

Для определения неизвестного взаимного угла поворота сечений  $\Delta\varphi_B$  в промежуточном шарнире используем граничное условие:

$$x = 7 \text{ м}, \quad v = \frac{24 \cdot 7^2}{2 EJ} - \frac{12 \cdot 7^3}{6 EJ} + 5\Delta\varphi_B - \frac{15 \cdot 5^3}{6 EJ} + \frac{14 \cdot 5^4}{24 EJ} - \frac{14 \cdot 2^4}{24 EJ} = 0, \quad \Delta\varphi_B = \frac{11,1}{EJ}.$$

В качестве проверки определим значение  $\Delta\varphi_B$  с помощью метода Мора. Поскольку  $\Delta\varphi_B$  представляет собой взаимное угловое перемещение (угол поворота правого сечения в шарнире  $B$  относительно левого сечения), приложим в сечении  $B$  парный единичный момент. Соответствующая единичная эпюра изгибающих моментов приведена на рис.5.9.



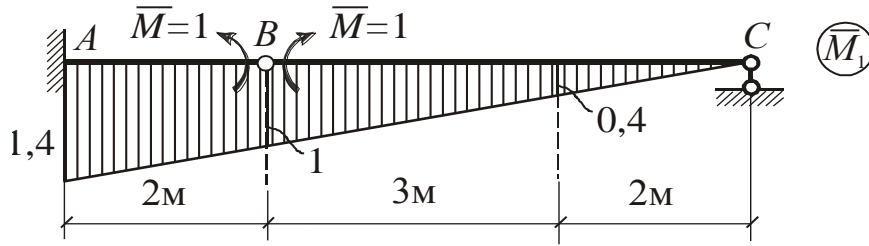


Рис.5.9

«Перемножаем» единичную и грузовую эпюры изгибающих моментов.

$$\Delta\varphi_B = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{2}{6} (2 \cdot 24 \cdot 1,4 + 24 \cdot 1) + \frac{3}{6} (2 \cdot 18 \cdot 0,4 + 18 \cdot 1) + \right. \\ \left. + \frac{14 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1+0,4}{2} + \frac{2}{6} (2 \cdot 18 \cdot 0,4 - 12 \cdot 0,4) \right] = \frac{11,05}{EJ}.$$

Результаты вычисления практически совпали. Запишем окончательные выражения для  $v(x)$  и  $\varphi(x)$ .

$$v(x) = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{24x^2}{2!} - \frac{12x^3}{3!} \Big|_1 + 11,1(x-2) - \frac{15(x-2)^3}{3!} + \frac{14(x-2)^4}{4!} \Big|_2 - \frac{14(x-5)^4}{4!} \Big|_3 \right];$$

$$\varphi(x) = v'(x) = \frac{1}{EJ} \left[ 24x - \frac{12x^2}{2!} \Big|_1 + 11,1 - \frac{15(x-2)^2}{2!} + \frac{14(x-2)^3}{3!} \Big|_2 - \frac{14(x-5)^3}{3!} \Big|_3 \right].$$

Вычислим значения  $v$  и  $\varphi$  в характерных сечениях балки.

$$x=0, \quad v=v_0=0, \quad \varphi=\varphi_0=0;$$

$$x=2 \text{ м}, \quad v = \frac{1}{EJ} \left( \frac{24 \cdot 2^2}{2} - \frac{12 \cdot 2^3}{6} \right) = \frac{32}{EJ},$$

$$\varphi_{\text{лев}} = \frac{1}{EJ} \left( 24 \cdot 2 - \frac{12 \cdot 2^2}{2} \right) = \frac{24}{EJ};$$

$$\varphi_{\text{прав}} = \varphi_{\text{лев}} + \Delta\varphi_B = \frac{1}{EJ} (24 + 11,1) = \frac{35,1}{EJ};$$

$$x=5 \text{ м}, \quad v = \frac{1}{EJ} \left( \frac{24 \cdot 5^2}{2} - \frac{12 \cdot 5^3}{6} + 11,1 \cdot 3 - \frac{15 \cdot 3^3}{6} + \frac{14 \cdot 3^4}{24} \right) = \frac{62,9}{EJ},$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left( 24 \cdot 5 - \frac{12 \cdot 5^2}{2} + 11,1 - \frac{15 \cdot 3^2}{2} + \frac{14 \cdot 3^3}{6} \right) = -\frac{23,5}{EJ}.$$

$$x=7 \text{ м}, \quad v=0 \text{ (шарнирная опора),}$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left( 24 \cdot 7 - \frac{12 \cdot 7^2}{2} + 11,1 - \frac{15 \cdot 5^2}{2} + \frac{14 \cdot 5^3}{6} - \frac{14 \cdot 2^3}{6} \right) = -\frac{29,5}{EJ}.$$

В качестве проверки определим некоторые значения  $v$  и  $\varphi$  с помощью метода Мора. Соответствующие единичные эпюры приведены на рис.5.10, 5.11 и 5.12.

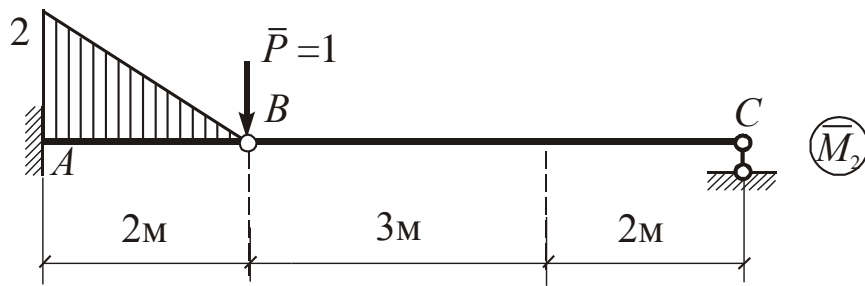


Рис.5.10

$$v(2) = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{32}{EJ}.$$

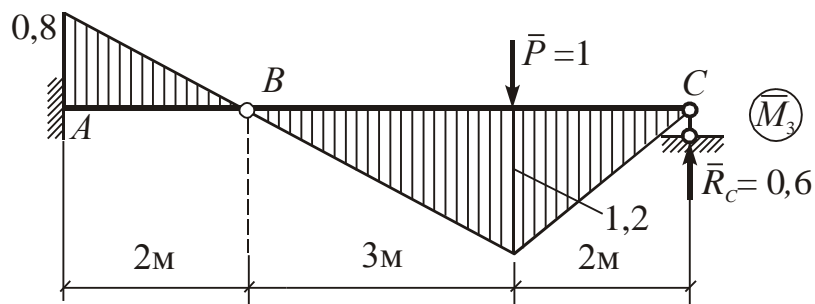


Рис.5.11

$$v(5) = \int_0^l \frac{\bar{M}_3 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} 24 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 0,8 + \frac{1}{2} 18 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 1,2 + \right. \\ \left. + \frac{14 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 1,2 + \frac{2}{6} (2 \cdot 18 \cdot 1,2 - 12 \cdot 1,2) \right] = \frac{62,9}{EJ}.$$

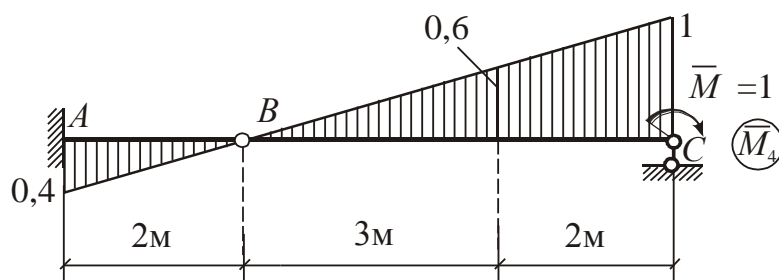


Рис.5.12

$$\varphi(7) = \int_0^l \frac{\bar{M}_4 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{1}{2} 24 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 0,4 - \frac{1}{2} 18 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 0,6 - \frac{14 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 0,6 + \right. \\ \left. + \frac{2}{6} (-2 \cdot 18 \cdot 0,6 + 2 \cdot 12 \cdot 1 - 18 \cdot 1 + 12 \cdot 0,6) \right] = -\frac{29,45}{EJ}.$$

Результаты вычислений практически совпали. Эпюры  $v$  и  $\varphi$  приведены на рис.5.8,д,е. Отметим их особенности. В сечении  $B$  угол поворота имеет скачок, а касательные к эпюре  $\varphi$  параллельны оси. На эпюре  $v$  в этом сечении излом и смена знака кривизны. В сечении, где  $Q$  обращается в нуль, на эпюре  $\varphi$  имеется точка перегиба. В сечении на третьем участке, где  $M = 0$ , угол поворота имеет экстремальное значение  $\varphi_{min}$ , а на эпюре  $v$  имеется точка перегиба. В сечении на втором участке, где  $\varphi = 0$ , прогиб имеет экстремальное значение  $v_{max}$ .

### Задача 5.3.

Для балки (рис.5.13,а) построим эпюры  $Q$  и  $M$  и определим прогиб и угол поворота в сечении  $C$ .

Данная балка является статически неопределимой, поскольку для определения трех опорных реакций  $R_A$ ,  $R_B$  и  $M_B$  можно использовать два уравнения равновесия  $\Sigma Y = 0$  и  $\Sigma M = 0$ . Составим выражение для прогиба балки с помощью метода начальных параметров.

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} \Big|_1 + \frac{q(x-2)^4}{4! EJ} \Big|_2$$

Начальные параметры равны:

$$x = 0, \quad v_0 = 0, \quad M_0 = 0.$$

Для определения неизвестных начальных параметров  $\varphi_0$  и  $Q_0$  используем граничные условия:

$$x = 5 \text{ м}, \quad v = 0, \quad \varphi = 0.$$

Составим выражение для углов поворота  $\varphi(x)$  и раскроем граничные условия.

$$\varphi(x) = v'(x) = \varphi_0 - \frac{Q_0 x^2}{2! EJ} \Big|_1 + \frac{q(x-2)^3}{3! EJ} \Big|_2.$$

$$v(5) = 5\varphi_0 - \frac{Q_0 \cdot 5^3}{6 EJ} + \frac{18 \cdot 3^4}{24 EJ} = 0;$$

$$\varphi(5) = \varphi_0 - \frac{Q_0 \cdot 5^2}{2 EJ} + \frac{18 \cdot 3^3}{6 EJ} = 0.$$

Решаем систему алгебраических уравнений.

$$\left. \begin{aligned} 5\varphi_0 - \frac{20,83Q_0}{EJ} &= -\frac{60,75}{EJ}; \\ \varphi_0 - \frac{12,5Q_0}{EJ} &= -\frac{81}{EJ}. \end{aligned} \right\} \varphi_0 = \frac{22,3}{EJ}, \quad Q_0 = R_A = 8,26 \text{ кН}.$$

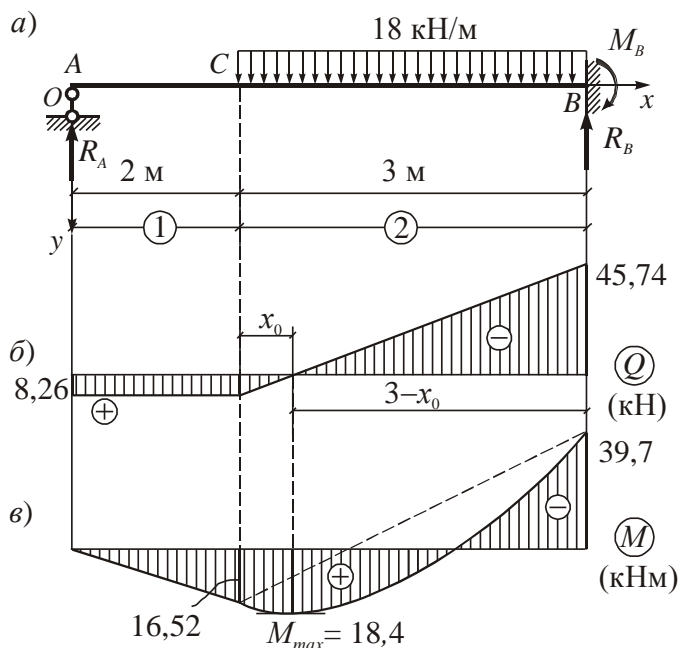


Рис.5.13

Определяем значения  $Q$  и  $M$  в характерных сечениях балки.

$$\begin{aligned} Q_A = Q_C = R_A &= 8,26 \text{ кН}, & Q_B &= 8,26 - 18 \cdot 3 = -45,74 \text{ кН}, \\ M_A = M_0 &= 0, & M_C &= 8,26 \cdot 2 = 16,52 \text{ кНм}, \\ M_B &= 8,26 \cdot 5 - 18 \cdot 3 \cdot 1,5 = -39,7 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Эпюры  $Q$  и  $M$  приведены на рис.5.13,б,в. Определяем экстремальное значение момента.

$$\frac{8,26}{x_0} = \frac{45,74}{3 - x_0}, \quad x_0 = 0,46 \text{ м}.$$

$$M_{\max} = 8,26 \cdot 2,46 - \frac{18 \cdot 0,46^2}{2} = 18,4 \text{ кНм}.$$

Определяем прогиб и угол поворота в сечении  $C$ .

$$v_C = v(2) = \frac{1}{EJ} \left( 22,3 \cdot 2 - \frac{8,26 \cdot 2^3}{6} \right) = \frac{33,6}{EJ};$$

$$\varphi_C = \varphi(2) = \frac{1}{EJ} \left( 22,3 - \frac{8,26 \cdot 2^2}{2} \right) = \frac{5,78}{EJ}.$$

#### Задача 5.4.

Для консольной рамы со стержнями различной жесткости (рис.5.14,а) определим с помощью метода Мора перемещения точки  $K$ .

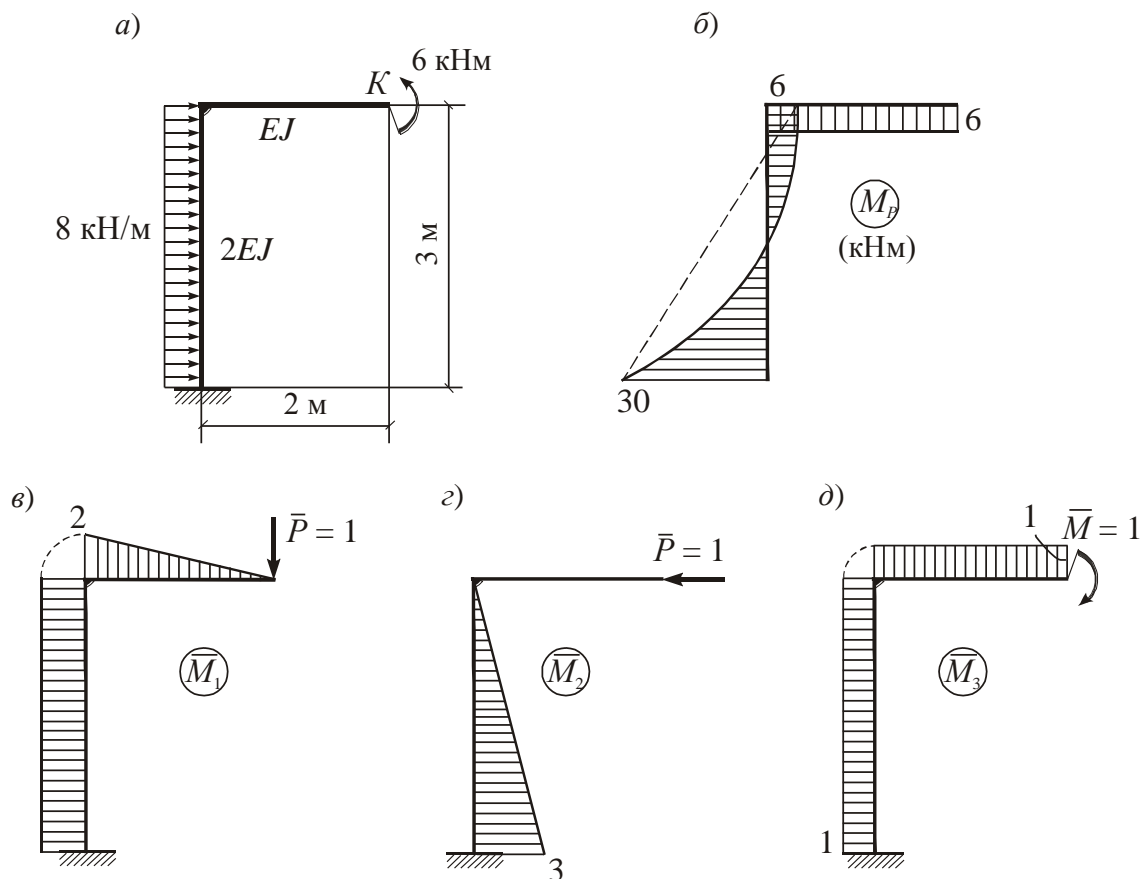


Рис.5.14

Построим грузовую и единичные эпюры изгибающих моментов (рис.5.14,б,в,г,д). Поскольку при определении перемещений в балках и рамах используется интеграл Мора, содержащий изгибающие моменты, построение эпюр  $Q$  и  $N$  не обязательно. Для определения вертикального и горизонтального перемещений точки  $K$  в этом сечении приложены единичные силы  $\bar{P}=1$ , а для определения угла поворота приложен единичный момент  $\bar{M}=1$ .

«Перемножаем» грузовую и единичные эпюры в пределах длины каждого стержня и суммируем результаты.

$$\Delta_{1P} = \sum_k \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 + \frac{1}{2EJ} \left( \frac{30-6}{2} \cdot 3 \cdot 2 - \frac{8 \cdot 3^3}{12} \cdot 2 \right) = \frac{6}{EJ};$$

$$\Delta_{2P} = \sum_k \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \left[ \frac{3}{6} (-2 \cdot 30 \cdot 3 + 6 \cdot 3) + \frac{8 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right] = -\frac{27}{EJ};$$

$$\Delta_{3P} = \sum_k \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_3 M_P}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2EJ} \left( \frac{30-6}{2} \cdot 3 \cdot 1 - \frac{8 \cdot 3^3}{12} \cdot 1 \right) = -\frac{3}{EJ}.$$

Точка  $K$  перемещается вниз и вправо. Сечение  $K$  поворачивается против хода часовой стрелки.

### Задача 5.5.

Для шарнирно опертой рамы (рис.5.15,а) определим с помощью метода Мора перемещения точки  $K$ .

Определяем опорные реакции от действия заданных нагрузок.

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0, & H_A &= 6 \text{ кН}; \\ \Sigma M_A &= 0, & -12 \cdot 3 \cdot 1,5 - 6 \cdot 2 - 18 + 3V_B &= 0, & V_B &= 28 \text{ кН}; \\ \Sigma M_B &= 0, & 12 \cdot 3 \cdot 1,5 - 6 \cdot 2 - 18 - 3V_A &= 0, & V_A &= 8 \text{ кН}; \\ \Sigma Y &= 0 \text{ (проверка)}, & -12 \cdot 3 + 8 + 28 &= -36 + 36 = 0. \end{aligned}$$

Строим грузовую эпюру изгибающих моментов (рис.5.15,б).

Точка  $K$  может иметь только горизонтальное перемещение. Приложим в точке  $K$  горизонтальную единичную силу  $\bar{P}=1$  и единичный момент  $\bar{M}=1$  и построим единичные эпюры изгибающих моментов (рис.5.15,в,г). «Перемножив» эти эпюры с грузовой эпюрой  $M_P$ , получим.

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \sum_k \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{3EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 12 \cdot 2 \cdot 2 \right) + \\ &\quad + \frac{1}{EJ} \left[ \frac{3}{6} (2 \cdot 12 \cdot 2 - 18 \cdot 2) + \frac{12 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right] = \frac{54,3}{EJ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2P} &= \sum_k \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{3EJ} \cdot 12 \cdot 2 \cdot 1 + \\ &\quad + \frac{1}{EJ} \left[ \frac{3}{6} (2 \cdot 12 \cdot 1 - 18 \cdot 1) + \frac{12 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right] = \frac{24,5}{EJ}. \end{aligned}$$

Точка  $K$  перемещается вправо, сечение  $K$  поворачивается по ходу часовой стрелки.

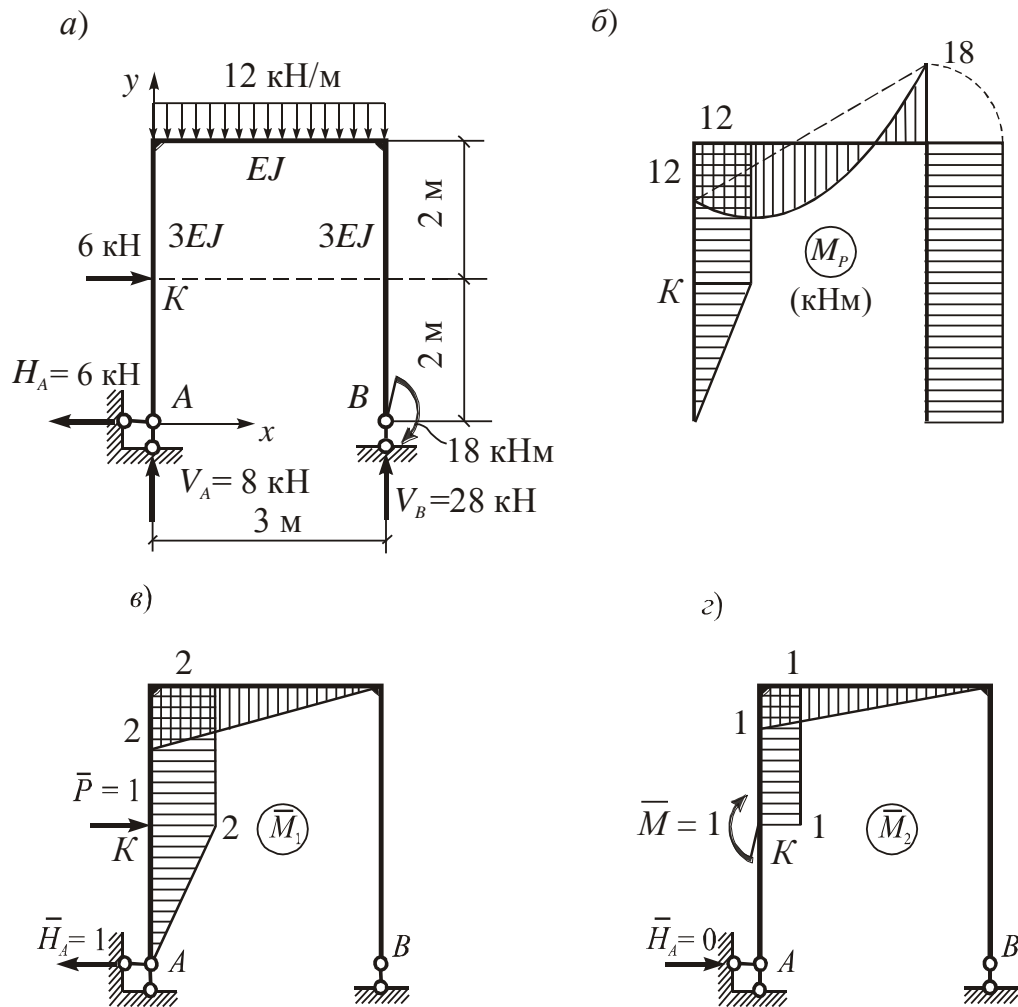


Рис.5.15

## ГЛАВА 6

### РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК И РАМ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СИЛ

#### 6.1. Основные определения и формулы

В статически неопределимых стержневых системах число неизвестных опорных реакций или внутренних усилий превышает число независимых уравнений равновесия, которые можно составить для их определения. Разность между ними характеризует степень статической неопределимости системы  $n$ , то есть число избыточных или «лишних» связей.

Наличие промежуточного шарнира, соединяющего два стержня (простой шарнир), понижает степень статической неопределимости на единицу. Наличие шарнира, соединяющего  $k$  стержней, понижает степень статической неопределимости на величину  $k - 1$ , поскольку такой шарнир эквивалентен  $k - 1$  простым шарнирам.

На рис.6.1 показана одна раз статически неопределимая балка, для которой  $n = 3 - 2 = 1$ . Рама, изображенная на рис.6.2, два раза статически неопределима ( $n = 6 - 3 - 1 = 2$ ). Напомним, что жесткая заделка эквивалентна трем опорным стержням.

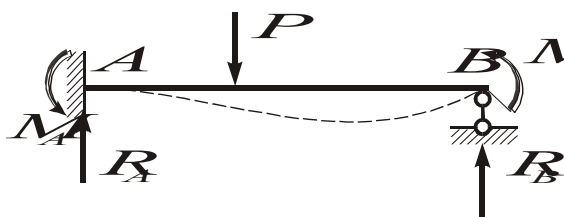


Рис.6.1

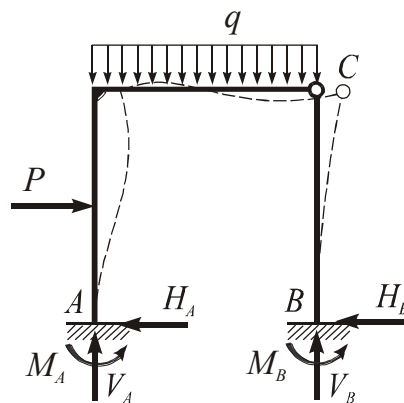


Рис.6.2

Степень статической неопределимости плоской стержневой системы можно определить по формуле:

$$n = -W = -(3Д - 2Ш - C_0), \quad (6.1)$$

где  $W$  – число степеней свободы системы,  $Д$  – число жестких (геометрически неизменяемых) элементов, условно называемых дисками,  $Ш$  – число простых шарниров и  $C_0$  – число опорных стержней.

Применив формулу (6.1) для рамы, изображенной на рис.6.2, получим

$$n = -(3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 6) = 2.$$

Таким образом, при  $n \geq 1$  система является статически неопределимой, при  $n = 0$  она статически определима, а при  $n < 0$  представляет собой геометрически изменяемую систему или «механизм».

При расчете статически неопределимых стержневых систем необходимо использовать дополнительные уравнения, составляемые из условий деформации системы. Одним из основных методов расчета статически неопределимых стержневых систем является метод сил.

При использовании метода сил надо устранить (отбросить) в заданной статически неопределимой системе «лишние» связи и образовать так называемую основную систему, которая должна быть геометрически и мгновенно неизменяемой. Основных систем может быть несколько, из них выбирается наиболее удобная для расчета.

В основной системе по направлению реакций в отброшенных связях прикладываются неизвестные силы или моменты  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Они представляют собой опорные реакции или внутренние усилия в сечениях, где устранены «лишние» связи. Поставив условие, что деформации основной и заданной систем должны быть одинаковыми, надо в основной системе приравнять к нулю линейные или угловые перемещения по направлению реакций в отброшенных связях от совместного действия нагрузок и неизвестных. Таким образом, можно составить дополнительные уравнения, которые позволяют определить неизвестные  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , то есть раскрыть статическую неопределимость задачи.

Рассмотрим основные системы для один раз статически неопределимой балки (рис.6.3,а).

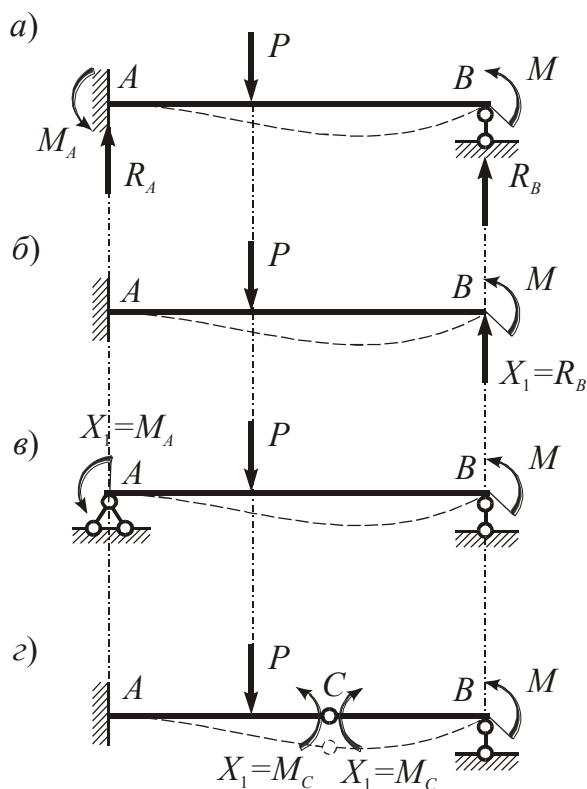


Рис.6.3

Для образования первой основной системы отброшена шарнирная опора  $B$  (рис.6.3,б). Неизвестным является опорная реакция  $X_1 = R_B$ . Дополнительное уравнение составляется из условия равенства нулю прогиба в точке  $B$  в основной системе от совместного действия нагрузок и неизвестного  $X_1$ :

$$v_B = v_{BP} + v_{BX_1} = 0.$$

Для образования второй основной системы жесткая заделка  $A$  заменена шарнирно-неподвижной опорой (рис.6.3,в). Неизвестным является реактивный момент  $X_1 = M_A$ . Дополнительное уравнение характеризует равенство нулю угла поворота в сечении  $A$  основной системы:

$$\varphi_A = \varphi_{AP} + \varphi_{AX_1} = 0.$$

Для образования третьей основной системы в сечении  $C$  введен шарнир (рис.6.3,г). Неизвестным является изгибающий момент  $X_1 = M_C$ , приложенный по обе стороны от шарнира. Такое неизвестное называется парным. Дополнительное уравнение характеризует равенство углов поворота сечений в точке  $C$  основной системы, то есть равенство нулю взаимного угла поворота:

$$\Delta\varphi_{CP} + \Delta\varphi_{CX_1} = 0.$$



Решая дополнительные уравнения, можно определить все неизвестные метода сил. Если в результате решения знак неизвестного  $X_i$  оказался положительным, то это означает, что его направление соответствует принятому в начале расчета, а если отрицательным – то его направление надо изменить на противоположное.

$$\left. \begin{aligned} &\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + .....+\delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0; \\ &\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + .....+\delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} = 0; \\ &..... \\ &..... \\ &\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + .....+\delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Уравнения (6.2) относятся к выбранной основной системе и характеризуют равенство нулю линейных или угловых перемещений по направлению реакций в отброшенных (устраненных) связях. Коэффициенты системы  $\delta_{ij}$  представляют собой перемещения по направлению реакций в отброшенных связях от действия единичных сил или моментов  $X_j = 1$ . Стоящие на главной диагонали системы (6.2) коэффициенты  $\delta_{11}, \delta_{22}, \dots, \delta_{nn}$  называются главными коэффициентами. Они всегда являются положительными.

Коэффициенты  $\delta_{ij}$  ( $i \neq j$ ) называются побочными коэффициентами. Для них на основании теоремы Бетти о взаимности работ справедливо равенство  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ . Побочные коэффициенты могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Величины  $\Delta_{ip}$  называются грузовыми или свободными членами. Они равны перемещениям в основной системе по направлению реакций в отброшенных связях от действия заданных нагрузок. Грузовые члены могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Отметим, что при рациональном выборе основной системы часть побочных коэффициентов и грузовых членов обращаются в нули, что приводит к упрощению расчета

Вид канонических уравнений не зависит от выбора основной системы, а их число равно степени статической неопределимости заданной системы.

Для определения коэффициентов и грузовых членов системы (6.2) обычно используется метод Мора. Для систем, стержни которых работают в основном на изгиб (балки и рамы), имеем

$$\delta_{ij} = \sum_k \int_{s_k} \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EJ} ds, \quad \Delta_{iP} = \sum_k \int_{s_k} \frac{\bar{M}_i M_P}{EJ} ds. \quad (6.3)$$

В формулах (6.3)  $\bar{M}_i$  и  $\bar{M}_j$  – изгибающие моменты в стержнях основной системы от действия единичных сил или моментов  $X_i = 1$  и  $X_j = 1$ , а  $M_p$  – изгибающий момент в основной системе от действия заданных нагрузок.

Интегрирование в формулах (6.3) производится в пределах длины каждого стержня, а суммирование – по всем стержням системы.

Для систем с прямыми стержнями постоянной или ступенчато-постоянной жесткости  $EJ$  вычисление интегралов (6.3) производится с помощью правила А.К.Верещагина, то есть путем “перемножения” эпюр.

После решения канонических уравнений и определения всех неизвестных можно построить окончательные эпюры изгибающих моментов  $M$ , поперечных и продольных сил  $Q$  и  $N$ . При этом для простой основной системы можно произвести ее расчет на совместное действие заданной нагрузки и всех неизвестных.

Для сложных рамных систем удобно вначале построить окончательную эпюру  $M$  с помощью суммирования ординат эпюр по формуле

$$M = M_p + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n. \quad (6.4)$$

Затем строится эпюра поперечных сил  $Q$  с помощью дифференциального соотношения  $M' = Q$ . Значения продольных сил  $N$  определяются с помощью уравнений равновесия  $\Sigma X = 0$ ,  $\Sigma Y = 0$  узлов рамы.

После построения эпюры  $M$  необходимо выполнить кинематическую проверку правильности решения и убедиться в выполнении условий деформации основной системы. Кинематическая проверка выполняется по формуле

$$\sum_k \int_{s_k} \frac{\bar{M}_i M}{EJ} ds = 0. \quad (6.5)$$

При использовании правила А.К.Верещагина результаты «перемножения» всех единичных эпюр с окончательной эпюрой  $M$  должны быть равны нулю.

После построения эпюр  $M$ ,  $Q$  и  $N$  определяются опорные реакции и производится проверка равновесия системы в целом.

Определение перемещений в статически неопределимой системе производится с помощью любой (наиболее удобной) основной системы. При этом надо построить в основной системе соответствующую единичную эпюру  $\bar{M}_k$  и «перемножить» ее с окончательной эпюрой  $M$ .

## 6.2. Примеры решения задач

### Задача 6.1.

Для статически неопределимой двухпролетной балки (рис.6.4,а) построим эпюры  $M$  и  $Q$  и определим угол поворота сечения на опоре  $C$ .

Данная балка два раза статически неопределима ( $n = 4 - 2 = 2$ ). Для образования основной системы заменим жесткую заделку  $A$  шарнирно неподвижной опорой и введем в сечении  $B$  промежуточный шарнир (рис.6.4,б).

Основная система представляет собой две не связанные друг с другом однопролетные шарнирно опертые балки  $AB$  и  $BC$ . Неизвестными метода сил являются реактивный момент в заделке  $X_1 = M_A$  и изгибающий момент  $X_2 = M_B$  в сечении над опорой  $B$ . Этот момент надо приложить в основной системе

слева и справа от шарнирной опоры  $B$ . При этом величина  $X_2$  называется парным или групповым неизвестным.

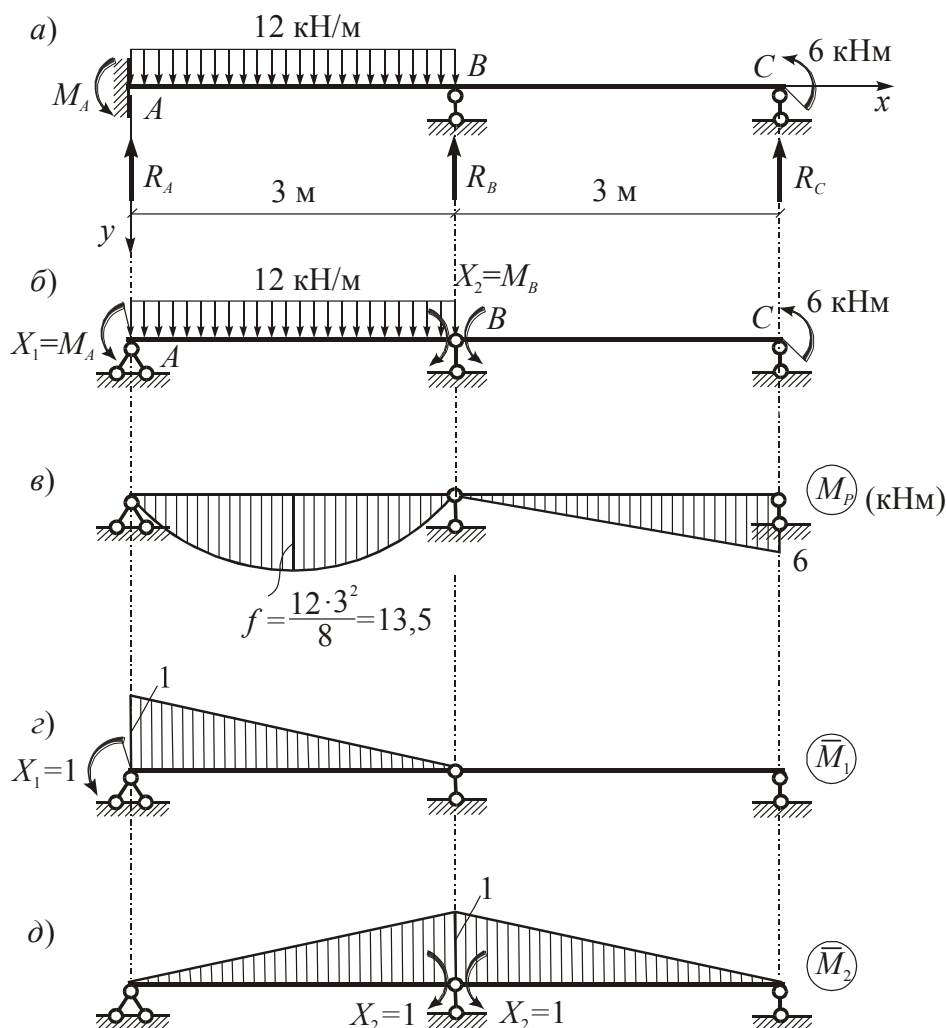


Рис.6.4

Запишем канонические уравнения метода сил:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Первое из этих уравнений характеризует равенство нулю угла поворота сечения  $A$ , а второе уравнение – равенство нулю взаимного угла поворота сечений над опорой  $B$  в принятой основной системе.

Строим грузовую и единичные эпюры изгибающих моментов в основной системе (рис.6.4, в, г, д). «Перемножив» эти эпюры между собой с помощью правила А.К.Верещагина, определим коэффициенты и грузовые члены канонических уравнений.

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \int_0^l \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_2}{EJ} dx = 2 \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{0,5}{EJ};$$

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{\overline{M}_1 M_P}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{12 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{13,5}{EJ};$$

$$\Delta_{2P} = \int_0^l \frac{\overline{M}_2 M_P}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} \left( \frac{12 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = -\frac{16,5}{EJ}.$$

Решаем систему канонических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{EJ} (X_1 + 0,5X_2 - 13,5) &= 0; \\ \frac{1}{EJ} (0,5X_1 + 2X_2 - 16,5) &= 0; \end{aligned} \right\}$$

$$X_1 = M_A = 10,71 \text{ кНм}, \quad X_2 = M_B = 5,57 \text{ кНм}.$$

Статическая неопределимость балки раскрыта. Изгибающие моменты  $M_A$  и  $M_B$  вызывают растяжение верхних волокон.

Для построения окончательных эпюр  $M$  и  $Q$  производим статический расчет балок  $AB$  и  $BC$  основной системы на совместное действие заданных нагрузок и моментов  $X_1$  и  $X_2$  (рис.6.5,а).

### **Балка AB**

$$\Sigma M_A = 0, \quad R_B^{\text{лев}} = \frac{12 \cdot 3 \cdot 1,5 - 10,71 + 5,57}{3} = 16,3 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0, \quad R_A = \frac{12 \cdot 3 \cdot 1,5 + 10,71 - 5,57}{3} = 19,7 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, \quad 12 \cdot 3 - 19,7 - 16,3 = 36 - 36 = 0.$$

### **Балка BC**

$$\Sigma M_B = 0, \quad R_C = \frac{6 + 5,57}{3} = 3,86 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0, \quad R_B^{\text{пр}} = R_C = 3,86 \text{ кН}.$$

Окончательные эпюры  $M$  и  $Q$  приведены на рис.6.5,б,в. Определяем значение  $M_{\max}$  в пролете  $AB$ :

$$M_{\max} = M_A + \frac{Q_A^2}{2q} = -10,71 + \frac{19,7^2}{2 \cdot 12} = 5,46 \text{ кНм}.$$

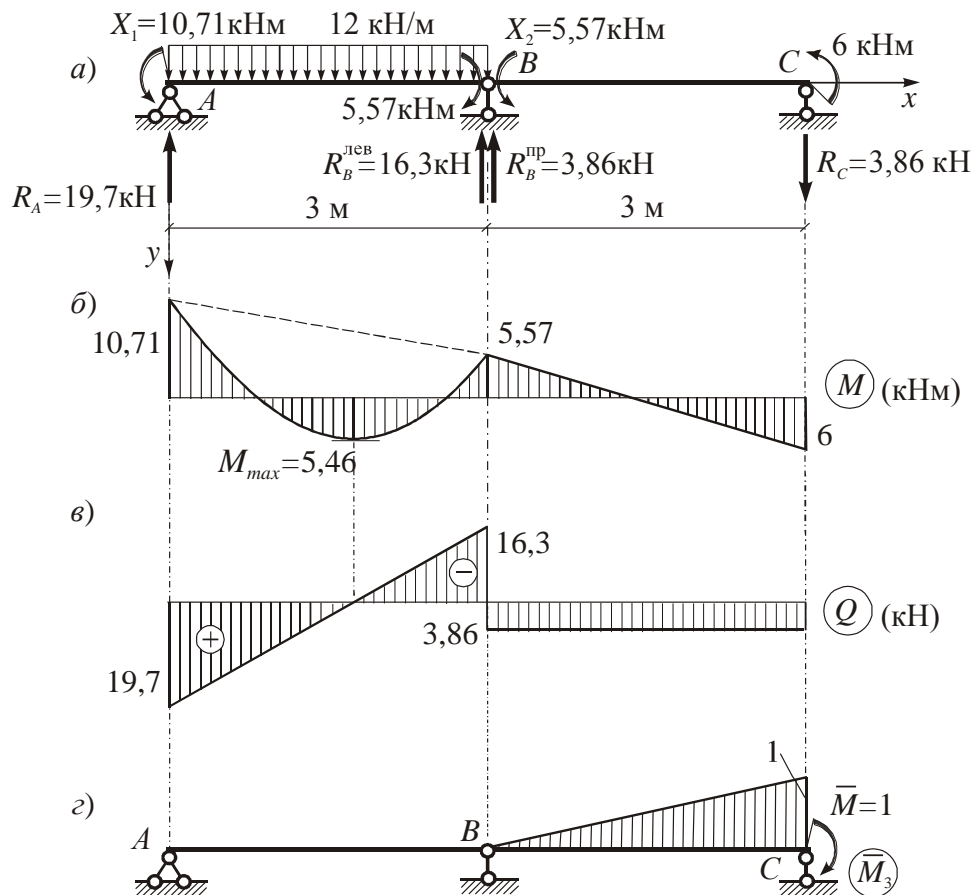


Рис.6.5

Выполним кинематическую проверку правильности решения задачи. Для этого «перемножим» окончательную эпюру  $M$  с единичными эпюрами  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  и убедимся в выполнении условий деформации основной системы:

$$\Delta_1 = \varphi_A = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 10,71 \cdot 1 + 5,57 \cdot 1) - \frac{12 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ} (13,495 - 13,5) = -\frac{0,005}{EJ}.$$

Относительная погрешность вычислений равна

$$\Delta \% = \frac{0,005}{13,495} \cdot 100 \% = 0,04 \%.$$

$$\Delta_2 = \Delta \varphi_B = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 5,57 \cdot 1 + 10,71 \cdot 1) - \frac{12 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 5,57 \cdot 1 - 6 \cdot 1) \right] = \frac{1}{EJ} (16,495 - 16,5) = -\frac{0,005}{EJ};$$

$$\Delta \% = \frac{0,005}{16,495} \cdot 100 \% = 0,03 \%.$$

Вычислительные погрешности малы, задача решена правильно.

Значение опорной реакции на промежуточной опоре  $B$  в заданной балке (рис.6.5,а) равно  $R_B = R_B^{\text{лсв}} + R_B^{\text{пр}} = 16,3 + 3,86 = 20,16$  кН. Выполним проверку равновесия балки (статическая проверка):

$$\Sigma Y = 0, \quad 12 \cdot 3 + 3,86 - 19,7 - 20,16 = 39,86 - 39,86 = 0.$$

Для определения угла поворота сечения на опоре  $C$  построим в принятой основной системе соответствующую единичную эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}_3$  (рис.6.5,з) и «перемножим» ее с окончательной эпюрой  $M$ .

$$\varphi_C = \int_0^l \frac{\bar{M}_3 M}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{3}{6} \cdot (-2 \cdot 6 \cdot 1 + 5,57 \cdot 1) = -\frac{3,2}{EJ}.$$

Поворот сечения  $C$  происходит против хода часовой стрелки.

## Задача 6.2

Выполним расчет стальной балки двутаврового сечения  $\text{I}30$  при действии показанной на рис.6.6,а нагрузки в двух случаях:

а) При осадке опоры  $C$  на величину  $c = 0,016$  м;

б) При условии, что опора  $B$  является упруго-податливой с коэффициентом жесткости  $k = 20$  кН/см.

В расчетах примем  $E = 2,1 \cdot 10^4$  кН/см<sup>2</sup>.

В статически неопределимых стержневых системах осадка и смещение опор по направлению опорных закреплений (кинематическое воздействие) вызывают появление в стержнях внутренних усилий и напряжений. Канонические уравнения метода сил (6.2) при совместном силовом и кинематических воздействиях должны быть дополнены членами  $\Delta_{ic}$ , определяемыми по формуле:

$$\Delta_{ic} = -\sum_k \bar{R}_k c_k, \quad (6.6)$$

где  $c_k$  – заданное смещение и  $\bar{R}_k$  – реакция на смещаемой опоре в единичном состоянии.

Произведение  $\bar{R}_k c_k$  является положительным, если направления реакции  $\bar{R}_k$  и заданного смещения  $c_k$  совпадают.

Балка, показанная на рис.6.6,а, является один раз статически неопределимой. Для решения первой задачи используем основную систему с промежуточным шарниром в сечении  $B$  (рис.6.6,б). Неизвестным является парный изгибающий момент  $X_1 = M_B$ . Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов, построенные в основной системе, приведены на рис.6.6,в,г. Используя метод Мора и правило Верещагина, определяем коэффициент и грузовой член канонического уравнения.

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dx = 2 \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{8}{3EJ};$$

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{6 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{2}{6} (2 \cdot 6 \cdot 0,5 + 6 \cdot 1) + \frac{2}{6} (-2 \cdot 6 \cdot 0,5 + 12 \cdot 0,5) \right] = -\frac{20}{EJ}.$$

Величина  $\Delta_{1c}$  равна:

$$\Delta_{1c} = -\bar{R}_C c = -0,25 \cdot 0,016 = -4 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

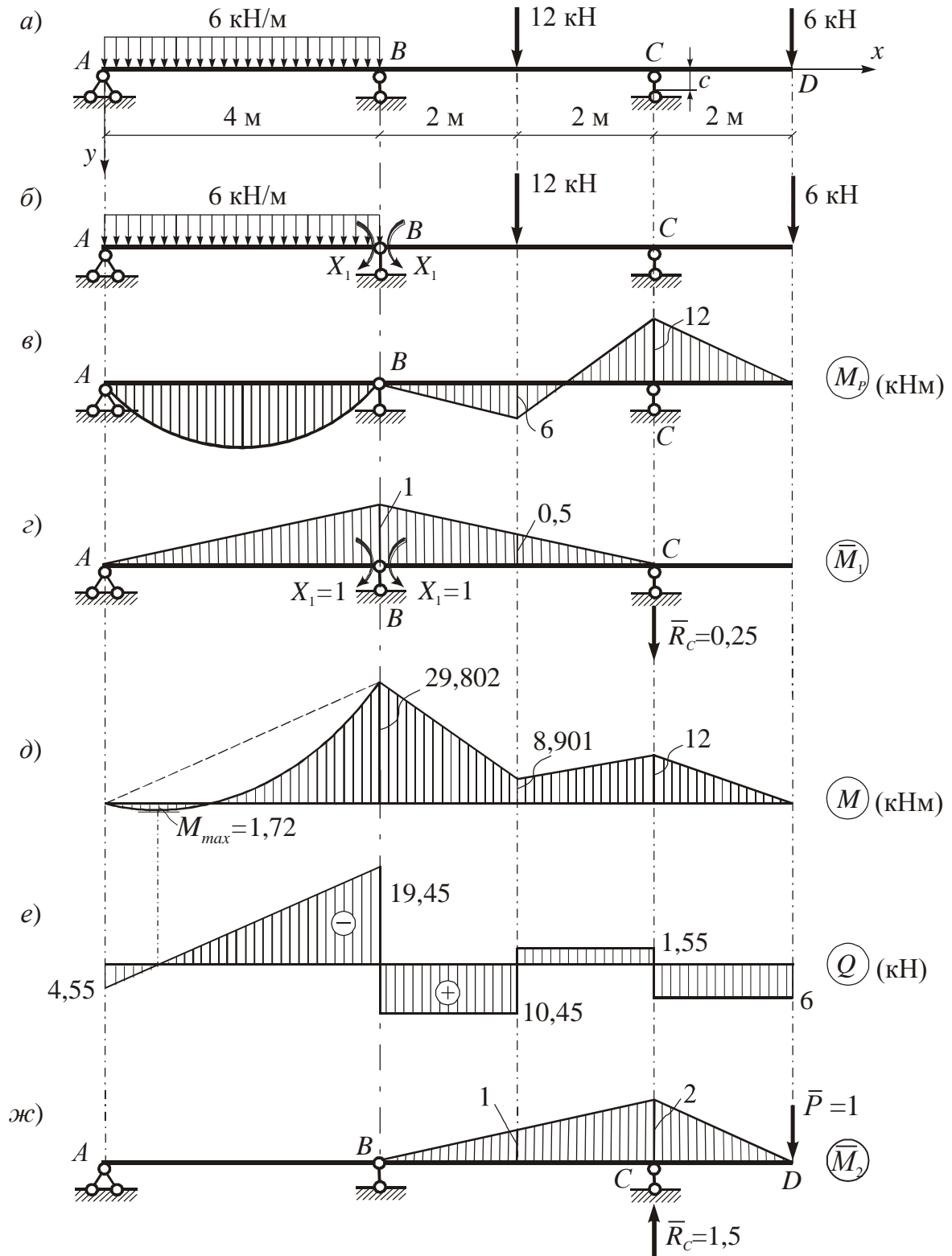


Рис.6.6

Решаем каноническое уравнение:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} + \Delta_{1c} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{8}{3} X_1 - 20 \right) - 4 \cdot 10^{-3} = 0.$$

Подставив значения модуля упругости и осевого момента инерции сечения двутавра  $J_z = 7080 \text{ см}^4$  и переведя размерность длины в сантиметры, находим:

$$X_1 = M_B = \frac{3 \cdot (20 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^{-3} \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 7080)}{8 \cdot 10^2} = 29,802 \cdot 10^2 \text{ кНсм} = 29,802 \text{ кНм}.$$

Окончательные эпюры изгибающих моментов и поперечных сил приведены на рис.6.6,д,е. Выполним кинематическую проверку правильности решения по формуле:

$$\Delta_i = \sum_k \int_{s_k} \frac{\bar{M}_i M}{EJ} ds + \Delta_{ic} = 0. \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \Delta = \Delta \varphi_B &= \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} dx + \Delta_{1c} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} \cdot 29,802 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{6 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{2}{6} (2 \cdot 29,802 \cdot 1 + \right. \\ &+ 2 \cdot 8,901 \cdot 0,5 + 29,802 \cdot 0,5 + 8,901 \cdot 1) + \frac{2}{6} (2 \cdot 8,901 \cdot 0,5 + 12 \cdot 0,5) \left. \right] - 4 \cdot 10^{-3} = \\ &= \frac{59,472 \cdot 10^4}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 7080} - 4 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^{-3} - 4 \cdot 10^{-3} = 0. \end{aligned}$$

Условие деформации основной системы выполняется. Задача решена правильно.

Определим прогиб балки на свободном конце. Соответствующая единичная эпюра изгибающих моментов в принятой основной системе приведена на рис.6.6,ж.

$$\begin{aligned} v_D &= \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M}{EJ} dx - \bar{R}_c c = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{2}{6} (2 \cdot 8,901 \cdot 1 + 29,802 \cdot 1) + \frac{2}{6} (2 \cdot 8,901 \cdot 1 + 2 \cdot 12 \cdot 2 + \right. \\ &+ 8,901 \cdot 2 + 12 \cdot 1) + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \left. \right] - \bar{R}_c c = \frac{63,736 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 7080} - (-1,5 \cdot 0,016 \cdot 10^2) = 2,83 \text{ см}. \end{aligned}$$

Точка  $D$  перемещается вниз.

Наибольшие нормальные напряжения в балке равны:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M}{W_z} = \frac{29,802 \cdot 10^2}{472} = 6,31 \text{ кН/см}^2.$$

Выполним расчет балки при условии, что опора  $B$  является упруго-податливой, то есть допускает вертикальное перемещение при нагружении. Опора  $B$  условно изображена на рис.6.7,а в виде пружины. В этом случае основную систему удобно образовать, отбросив мысленно эту опору (рис.6.7,б). Соответствующие грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов приведены на рис.6.7,в,г. Каноническое уравнение метода сил имеет такой же вид, как и в рассмотренном выше случае. Коэффициент и грузовой член равны:

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dx = 2 \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{32}{3EJ};$$



$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{6 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{2}{6} (2 \cdot 30 \cdot 2 + 2 \cdot 21 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 21 \cdot 2) + \frac{2}{6} (-2 \cdot 21 \cdot 1 + 12 \cdot 1) \right] = -\frac{200}{EJ}.$$

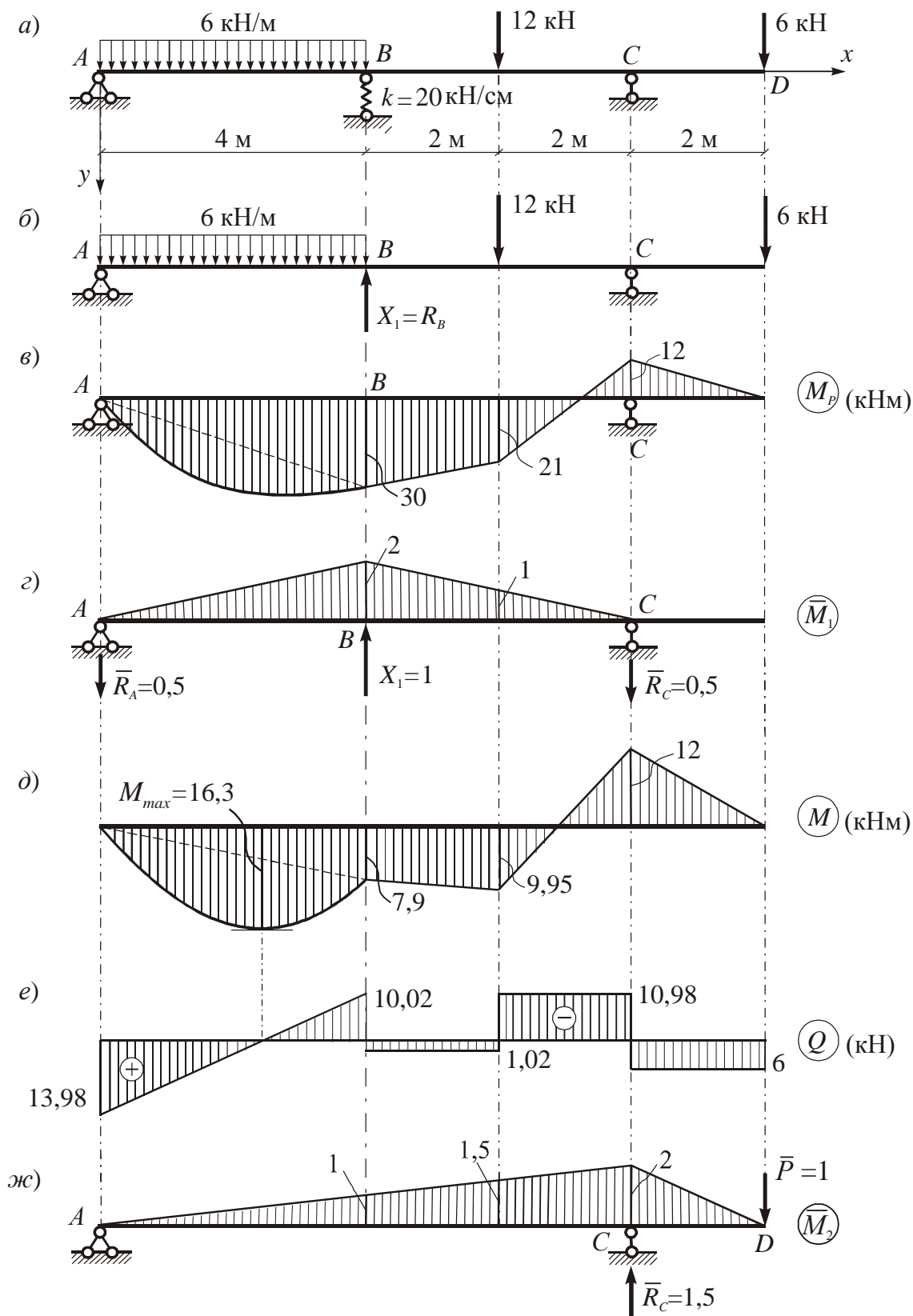


Рис.6.7

Поскольку опора  $B$  является упруго-податливой, она допускает вертикальное перемещение (осадку), равное  $\delta = \frac{S}{k}$ , где  $S = -X_1$  – сила, передаваемая балкой на опору. С учетом осадки опоры  $B$  каноническое уравнение метода сил примет следующий вид:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = \delta = -\frac{X_1}{k}.$$

Переведя длину в сантиметры, решим каноническое уравнение.

$$\left( \frac{32 \cdot 10^6}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 7080} + \frac{1}{20} \right) X_1 - \frac{200 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 7080} = 0,$$

$$X_1 = R_B = 11,05 \text{ кН}.$$

Поскольку опорная реакция направлена вверх, при действии нагрузки балка оказывает давление на упруго-податливую опору. Произведя расчет основной системы на действие заданной нагрузки и силы  $X_1$ , построим окончательные эпюры  $M$  и  $Q$  (рис.6.7,д,е).

Выполним проверку правильности решения. Осадка упруго-податливой опоры  $B$  равна:

$$v_B = \frac{X_1}{k} = \frac{11,05}{20} = 0,55 \text{ см}.$$

С другой стороны, эта величина может быть получена путем «перемножения» эпюр  $M$  и  $\bar{M}_1$ :

$$v_B = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 7,9 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{6 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{2}{6} (2 \cdot 7,9 \cdot 2 + 2 \cdot 9,95 \cdot 1 + 7,9 \cdot 1 + 9,95 \cdot 2) + \frac{2}{6} (-2 \cdot 9,95 \cdot 1 + 12 \cdot 1) \right] = -\frac{82,13}{EJ} = -\frac{82,13 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 7080} = -0,55 \text{ см}.$$

Знак минус указывает, что перемещение точки  $B$  происходит в направлении, противоположном направлению единичной силы, то есть вниз. Результаты вычисления осадки совпали, следовательно, задача решена правильно.

Определим прогиб балки на свободном конце. Соответствующая единичная эпюра в принятой основной системе приведена на рис.6.7,жс.

Выполняя «перемножение» эпюр  $M$  и  $\bar{M}_2$ , получаем:

$$v_D = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 7,9 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{6 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{2}{6} (2 \cdot 7,9 \cdot 1 + 2 \cdot 9,95 \cdot 1,5 + 7,9 \cdot 1,5 + 9,95 \cdot 1) + \frac{2}{6} (-2 \cdot 9,95 \cdot 1,5 + 2 \cdot 12 \cdot 2 - 9,95 \cdot 2 + 12 \cdot 1,5) + 12 \cdot 1,5) + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] = -\frac{27,6}{EJ} = -\frac{27,6 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 7080} = -0,19 \text{ см}.$$

Точка  $D$  перемещается вверх.

Наибольшие нормальные напряжения в балке равны:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M}{W_z} = \frac{16,3 \cdot 10^2}{472} = 3,45 \text{ кН/см}^2.$$

### Задача 6.3

Выполним расчет стальной балки двутаврового сечения 124 при действии показанной на рис.6.8,а нагрузки и теплового воздействия в пролете с различной температурой по нижним и верхним волокнам. Участок теплового воздействия показан с помощью пунктирной линии. Закон изменения температуры по высоте поперечного сечения примем линейным.

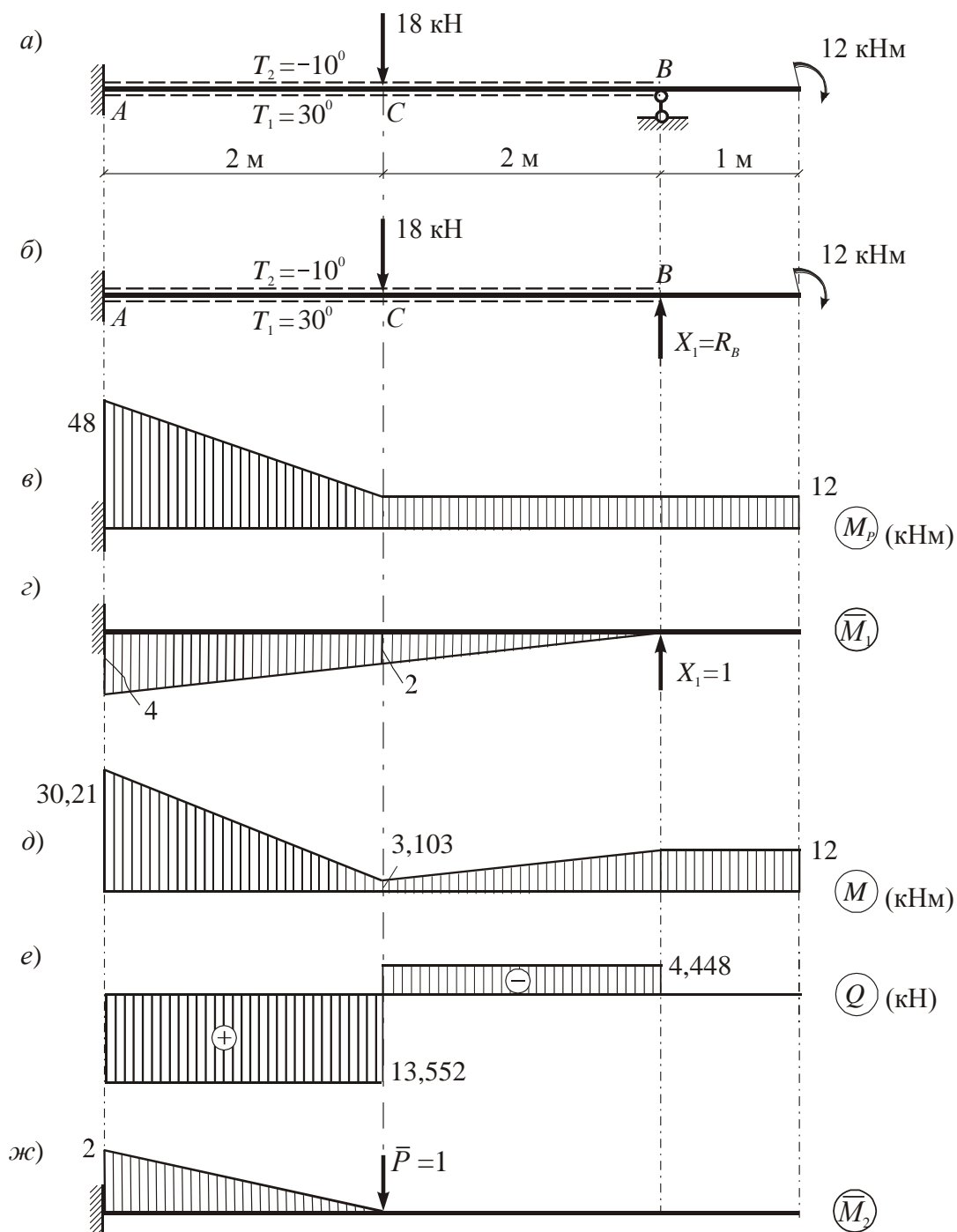


Рис.6.8

Балка является один раз статически неопределимой. Образует основную систему, отбросив мысленно опору  $B$  и введя в этом сечении неизвестную силу  $X_1 = R_B$  (рис.6.8,б). Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов, построенные в основной системе, приведены на рис.6.8,в,г.

В статически неопределимых стержневых системах тепловое воздействие вызывают появление в стержнях внутренних усилий и напряжений. Канонические уравнения метода сил (6.2) при совместном силовом и тепловом воздействиях должны быть дополнены температурными членами  $\Delta_{iT}$ , определяемыми по формуле:

$$\Delta_{iT} = \alpha \sum_k \int_{s_k} T_0 \bar{N}_i ds + \alpha \sum_k \int_{s_k} \frac{\Delta T}{h} \bar{M}_i ds, \quad (6.8)$$

где  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения,  $T_0$  – температура на уровне оси стержня, равная для симметричных относительно нейтральной оси сечений  $T_0 = (T_1 + T_2)/2$ ,  $\Delta T = T_1 - T_2$  – разность температур крайних волокон,  $h$  – высота поперечного сечения,  $\bar{N}_i$  и  $\bar{M}_i$  – внутренние усилия в основной системе в единичных состояниях на участках теплового воздействия и  $s_k$  – длина этих участков.

Для прямых стержней с постоянными по длине поперечным сечением и температурой величину  $\Delta_{iT}$  можно определить по формуле:

$$\Delta_{iT} = \alpha \sum_k T_0 \Omega_{\bar{N}_i} + \alpha \sum_k \frac{\Delta T}{h} \Omega_{\bar{M}_i}, \quad (6.9)$$

где  $\Omega_{\bar{N}_i}$  и  $\Omega_{\bar{M}_i}$  – площади единичных эпюр продольных сил и изгибающих моментов на участках теплового воздействия.

Первый член в формуле (6.9) является положительным, если  $T_0 > 0$ , а продольная сила является растягивающей. Второй член является положительным, если изгибающий момент  $\bar{M}_i$  вызывает растяжение волокон, испытывающих действие более высокой температуры.

Используя метод Мора и правило Верещагина, определяем коэффициент и грузовой член канонического уравнения.

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{64}{3EJ};$$

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} \left[ \frac{2}{6} (2 \cdot 48 \cdot 4 + 2 \cdot 12 \cdot 2 + 48 \cdot 2 + 12 \cdot 4) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 12 \right] = -\frac{216}{EJ}.$$

Определяем температурный член по формуле (6.9). Учитывая, что продольная сила в стержне отсутствует ( $\bar{N}_1 = 0$ ), получим:

$$\Delta_{iT} = \alpha \frac{30 - (-10)}{0,24} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 1333\alpha,$$

где  $h = 24\text{см} = 0,24\text{м}$  – высота сечения двутавра 124.

Решаем каноническое уравнение:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} + \Delta_{1T} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{64}{3} X_1 - 216 \right) + 1333\alpha = 0.$$

Принимая коэффициент линейного температурного расширения для стали  $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$  1/град,  $E = 2,1 \cdot 10^4$  кН/см<sup>2</sup>, момент инерции сечения двутавра I24  $J_z = 3460$  см<sup>4</sup> и переводя размерность длины в метры, получим:

$$X_1 = R_B = \frac{3 \cdot (216 - 1333 \cdot 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 3460 \cdot 10^{-4})}{64} = 4,448 \text{ кН}.$$

Окончательные эпюры изгибающих моментов и поперечных сил приведены на рис.6.8, д, е. Кинематическая проверка правильности решения выполняется по формуле:

$$\Delta = \sum_k \int_{s_k} \frac{\bar{M}_i M}{EJ} ds + \Delta_{1T} = 0. \quad (6.10)$$

Применяя эту формулу, получим:

$$\begin{aligned} \Delta = v_B &= \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} dx + \Delta_{1T} = -\frac{1}{EJ} \left[ \frac{2}{6} (2 \cdot 4 \cdot 30,21 + 2 \cdot 2 \cdot 3,103 + 2 \cdot 30,21 + 4 \cdot 3,103) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{6} (2 \cdot 2 \cdot 3,103 + 2 \cdot 12) \right] + 1333\alpha = -\frac{121,1 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 3460} + 1333 \cdot 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 10^2 = \\ &= -1,67 + 1,67 = 0. \end{aligned}$$

Задача решена правильно. Определим прогиб балки в середине пролета. Соответствующая единичная эпюра изгибающих моментов в принятой основной системе приведена на рис.6.8, ж. Используя формулу (6.10), получаем:

$$\begin{aligned} v_C &= \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M}{EJ} dx + \Delta_{2T} = \frac{1}{EJ} \frac{2}{6} (2 \cdot 30,21 \cdot 2 + 3,103 \cdot 2) - \alpha \frac{30 - (-10)}{0,24} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \\ &= \frac{42,35}{EJ} - 333,3\alpha = \frac{42,35 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 3460} - 333,3 \cdot 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 10^2 = 0,166 \text{ см}. \end{aligned}$$

Точка С перемещается вниз. Определим наибольшие нормальные напряжения в балке:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M}{W_z} = \frac{30,21 \cdot 10^2}{289} = 10,45 \text{ кН/см}^2.$$

#### Задача 6.4.

Для статически неопределимой рамы со стержнями различной жесткости (рис.6.9) построим эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  и определим вертикальное перемещение точки С.

Определим по формуле (6.1) степень статической неопределимости рамы

$$n = -(3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 5) = 2.$$

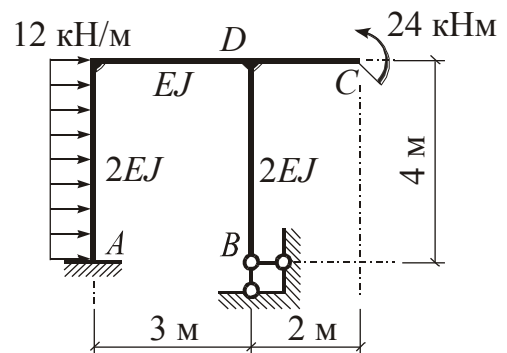


Рис.6.9

Рама два раза статически неопределима. Для образования основной системы отбросим шарнирно-неподвижную опору  $B$  (рис.6.10,а).

Неизвестными метода сил являются опорные реакции на опоре  $B$ :  $X_1 = V_B$  и  $X_2 = H_B$ . Запишем канонические уравнения, характеризующие равенство нулю линейных перемещений точки  $B$  в принятой основной системе.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Для определения коэффициентов и грузовых членов канонических уравнений строим грузовую и единичные эпюры изгибающих моментов (рис.6.10,б,в,г) и «перемножаем» их между собой.

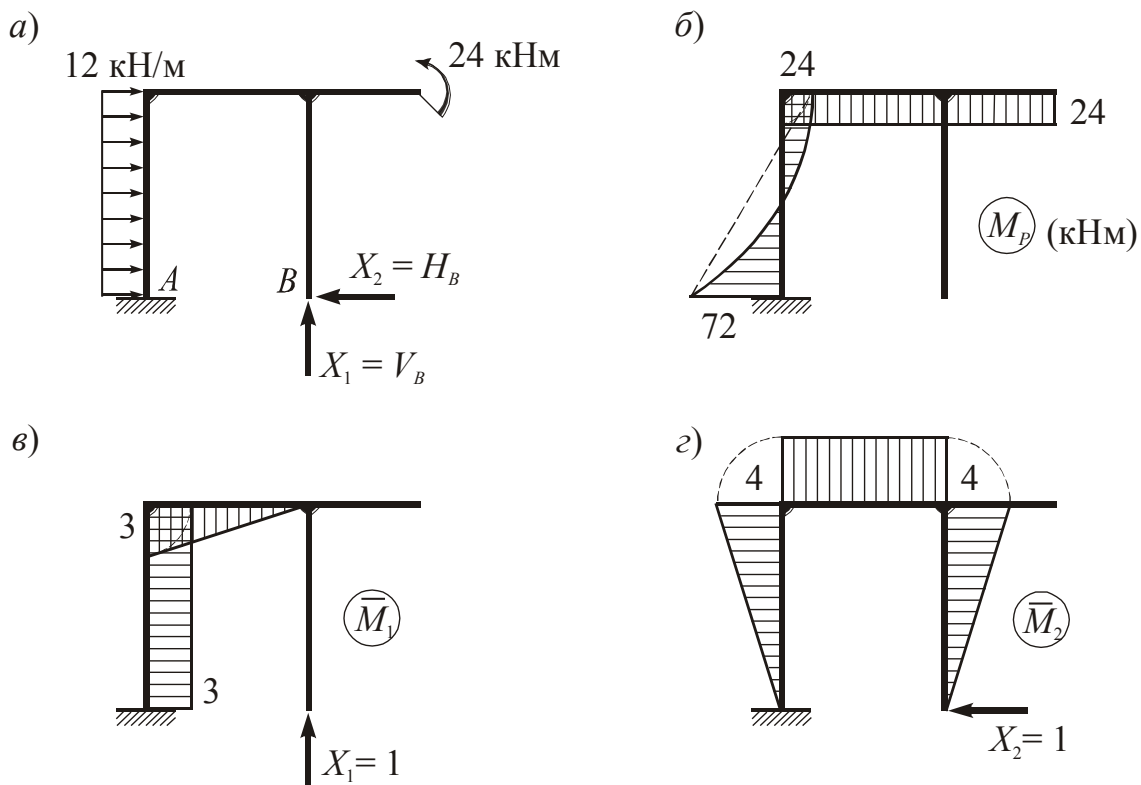


Рис.6.10

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2EJ} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{27}{EJ}; \\ \delta_{22} &= \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EJ} dx = 2 \cdot \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{EJ} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = \frac{69,33}{EJ}; \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = -\frac{30}{EJ}; \\ \Delta_{1P} &= \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \left( -\frac{72 - 24}{2} \cdot 4 \cdot 3 + \frac{12 \cdot 4^3}{12} \cdot 3 \right) + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 24 = \frac{60}{EJ}; \end{aligned}$$

$$\Delta_{2P} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \left[ \frac{4}{6} (-2 \cdot 24 \cdot 4 + 72 \cdot 4) - \frac{12 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right] - \frac{1}{EJ} \cdot 24 \cdot 3 \cdot 4 = -\frac{320}{EJ}.$$

Решаем систему канонических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{EJ} (27X_1 - 30X_2 + 60) &= 0; \\ \frac{1}{EJ} (-30X_1 + 69,33X_2 - 320) &= 0; \end{aligned} \right\}$$

$$X_1 = V_B = 5,6 \text{ кН}, \quad X_2 = H_B = 7,04 \text{ кН}.$$

Направления неизвестных  $X_1$  и  $X_2$  соответствуют принятым в начале расчета. Для построения окончательных эпюр  $M$ ,  $Q$  и  $N$  произведем расчет основной системы на совместное действие заданных нагрузок и сил  $X_1$  и  $X_2$  (рис.6.11,а).

Определяем значения  $M$ ,  $Q$  и  $N$  в характерных сечениях стержней рамы.

#### Стержень DC

$$M = 24 \text{ кНм (растянуты нижние волокна)}, \quad Q = N = 0.$$

#### Стержень BD

$$M_B = 0, \quad M_D = -7,04 \cdot 4 = -28,16 \text{ кНм (растянуты правые волокна)};$$

$$Q_B = Q_D = 7,04 \text{ кН}, \quad N_B = N_D = -5,6 \text{ кН (сжатие)}.$$

#### Стержень DE

$$M_D = -28,16 + 24 = -4,16 \text{ кНм (растянуты верхние волокна)};$$

$$M_E = -4,16 + 5,6 \cdot 3 = 12,64 \text{ кНм (растянуты нижние волокна)};$$

$$Q_D = Q_E = -5,6 \text{ кН}, \quad N_D = N_E = -7,04 \text{ кН (сжатие)}.$$

#### Стержень AE

$$M_E = 12,64 \text{ кНм (растянуты правые волокна)};$$

$$M_A = -12 \cdot 4 \cdot 2 + 24 + 5,6 \cdot 3 = -55,2 \text{ кНм (растянуты левые волокна)};$$

$$Q_E = -7,04 \text{ кН}, \quad Q_A = -7,04 + 12 \cdot 4 = 40,96 \text{ кН}, \quad N_E = N_A = 5,6 \text{ кН (растяжение)}.$$

Эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  приведены на рис.6.11,б,в,г.

Определяем значение  $M_{max}$  в левой стойке рамы (стержень AE) :

$$M_{max} = M_E + \frac{Q_E^2}{2q} = 12,64 + \frac{(-7,04)^2}{2 \cdot 12} = 14,7 \text{ кНм}.$$

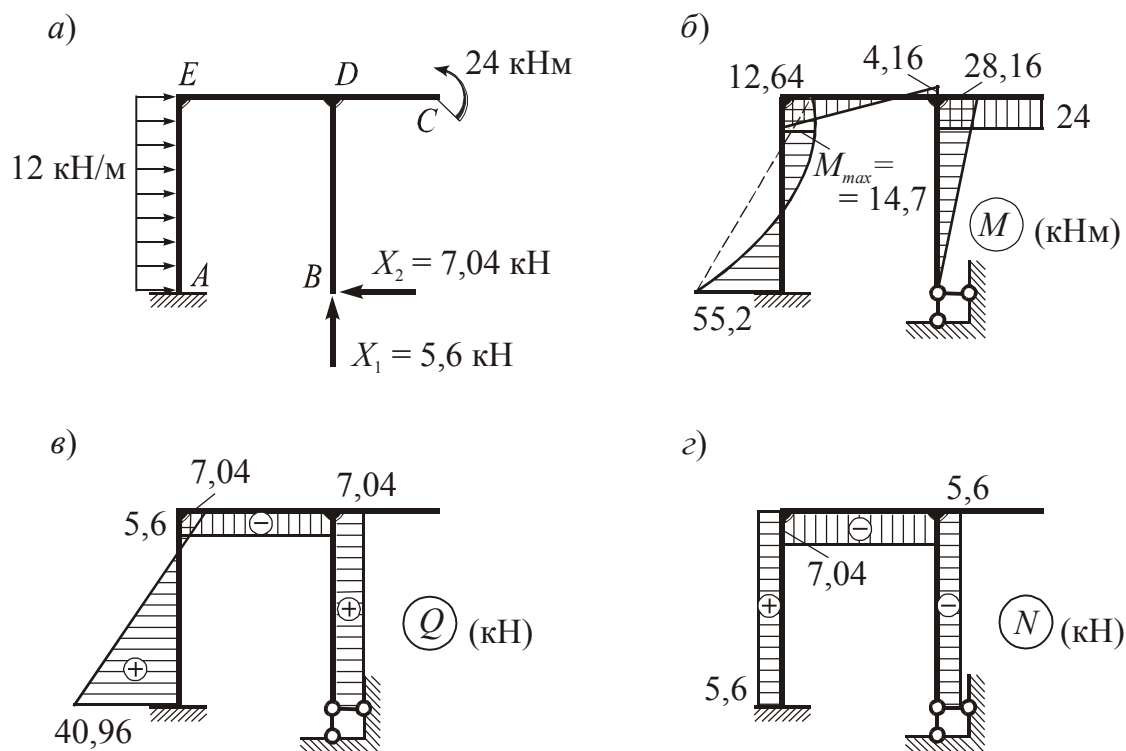


Рис.6.11

Выполним кинематическую проверку и убедимся в выполнении условий деформации основной системы. Для этого «перемножим» окончательную эпюру  $M$  с единичными эпюрами  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$ :

$$\Delta_1 = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 12,64 \cdot 3 - 4,16 \cdot 3) +$$

$$+ \frac{1}{2EJ} \left( -\frac{55,2 - 12,64}{2} \cdot 4 \cdot 3 + \frac{12 \cdot 4^3}{12} \cdot 3 \right) = \frac{1}{EJ} (133,92 - 133,92) = 0;$$

$$\Delta_2 = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_2 M}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{12,64 - 4,16}{2} \cdot 3 \cdot 4 + \frac{1}{2EJ} \left[ \frac{1}{2} \cdot 28,16 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{6} \cdot (-2 \cdot 12,64 \cdot 4 + 55,2 \cdot 4) - \frac{12 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right] = \frac{1}{EJ} (148,7 - 148,6) = \frac{0,1}{EJ}.$$

Относительная погрешность вычислений равна:

$$\Delta \% = \frac{0,1}{148,6} \cdot 100 \% = 0,07 \%.$$

Вычислительная погрешность мала. Определим по эпюрам  $M$ ,  $Q$  и  $N$  значения опорных реакций (рис.6.12).

Выполним статическую проверку равновесия рамы:

$$\Sigma X = 0, \quad 12 \cdot 4 - 40,96 - 7,04 = 48 - 48 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0, \quad -5,6 + 5,6 = 0;$$



$$\Sigma M_B = 0, \quad -12 \cdot 4 \cdot 2 + 24 + 55,2 + 5,6 \cdot 3 = -96 + 96 = 0.$$

Рама в целом находится в равновесии.

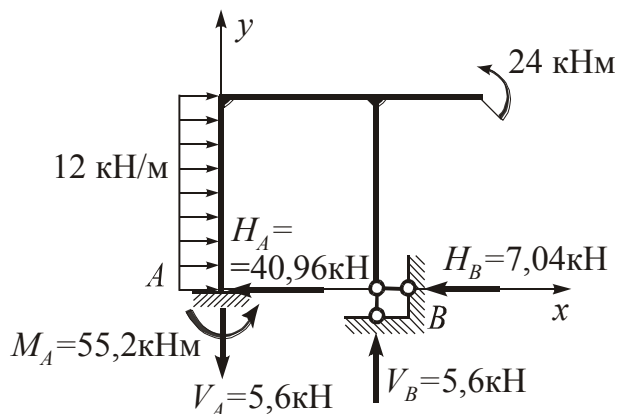


Рис.6.12

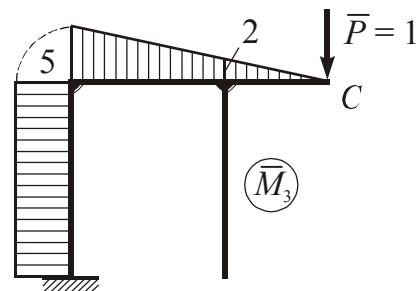


Рис.6.13

Определим вертикальное перемещение точки  $C$ . Для этого построим в основной системе соответствующую единичную эпюру  $\bar{M}_3$  (рис.6.13) и «перемножим» ее с окончательной эпюрой  $M$ .

$$\Delta_3 = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_3 M}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 24 + \frac{3}{6} \cdot (-2 \cdot 12,64 \cdot 5 + 2 \cdot 4,16 \cdot 2 - 12,64 \cdot 2 + 4,16 \cdot 5) \right] + \frac{1}{2EJ} \left( \frac{55,2 - 12,64}{2} \cdot 4 \cdot 5 - \frac{12 \cdot 4^3}{12} \cdot 5 \right) = -\frac{52,32}{EJ}.$$

Точка  $C$  перемещается вверх.

### Задача 6.5.

Для статически неопределимой рамы с шарниром (рис.6.14) построим эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  и определим горизонтальное перемещение точки  $D$ .

Определим степень статической неопределимости рамы по формуле (6.1):

$$n = -(3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 6) = 2.$$

Рама два раза статически неопределима и геометрически неизменяема. Она состоит из консольной рамы  $AEC$  и шарнирно опертой рамы  $BCD$ , соединенных между собой шарниром  $C$ . Для образования основной системы произведем мысленный разрез по шарниру  $C$  (рис.6.15,а).

Неизвестными являются силы  $X_1$  и  $X_2$ , характеризующие взаимодействие между рамами  $AEC$  и  $BCD$ . Величины  $X_1$  и  $X_2$  являются парными неизвестными.

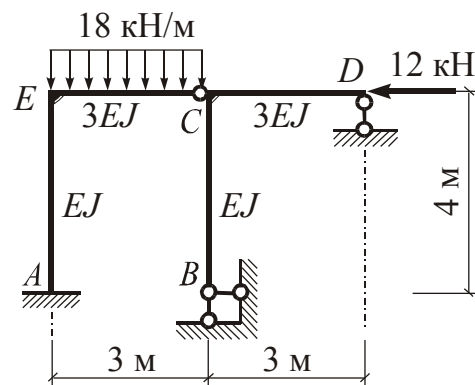


Рис.6.14

Запишем канонические уравнения метода сил, характеризующие отсутствие взаимных линейных перемещений сечений в шарнире  $C$ .

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Грузовая и единичные эпюры изгибающих моментов приведены на рис.6.15, б, в, г. Отметим, что во втором единичном состоянии рама  $BCD$  не испытывает изгиб.

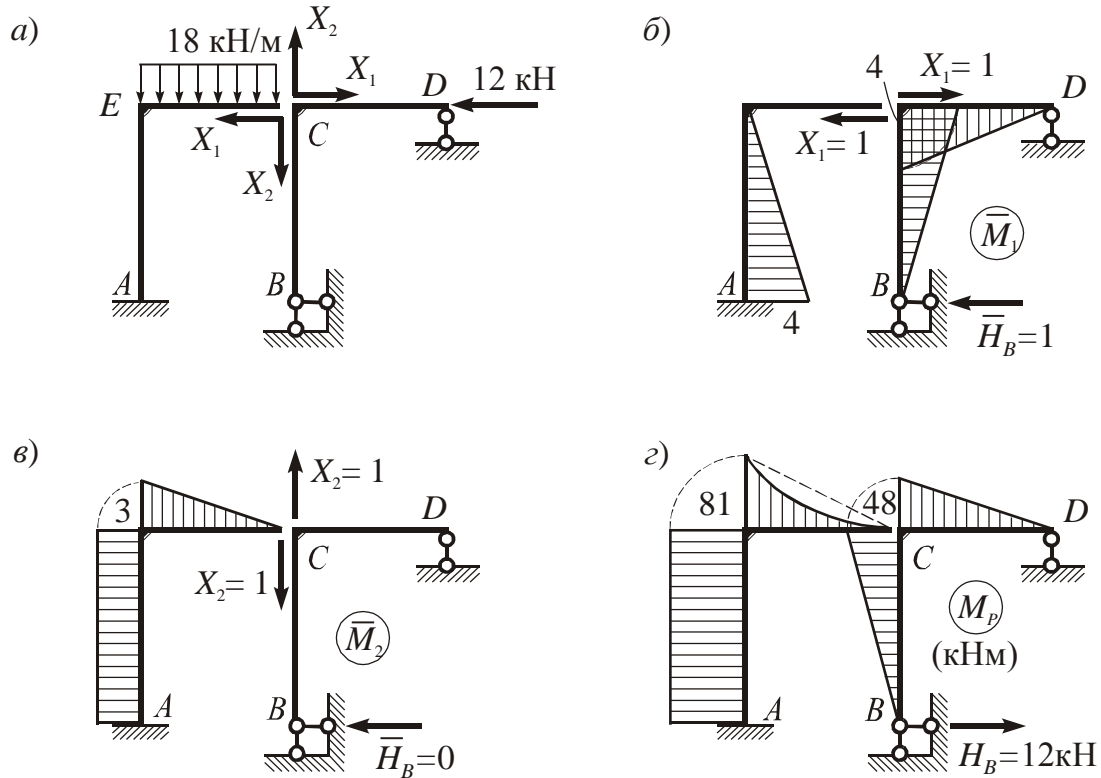


Рис.6.15

Определяем коэффициенты и грузовые члены канонических уравнений с помощью метода Мора и правила А.К.Верещагина.

$$\delta_{11} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 2 \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{48}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EJ} dx = \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{39}{EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = -\frac{24}{EJ};$$

$$\Delta_{1P} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = -\frac{1}{3EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 81 \right) = -\frac{968}{EJ};$$

$$\Delta_{2P} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{3EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot 81 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{18 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) + \frac{1}{EJ} 81 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1033}{EJ}.$$

Решаем систему канонических уравнений:

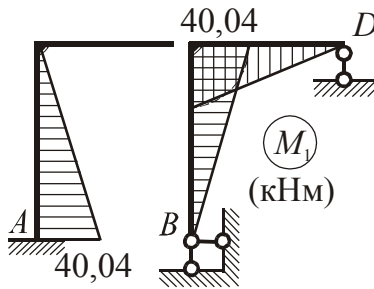
$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{EJ}(48X_1 - 24X_2 - 968) &= 0; \\ \frac{1}{EJ}(-24X_1 + 39X_2 + 1033) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$X_1 = 10,01 \text{ кН}, \quad X_2 = -20,32 \text{ кН}.$$

Направление силы  $X_2$  надо изменить на противоположное.

Построим окончательную эпюру изгибающих моментов с помощью суммирования эпюр по формуле (6.4). Строим эпюры  $M_1 = \bar{M}_1 X_1$  и  $M_2 = \bar{M}_2 X_2$  (так называемые «исправленные» единичные эпюры). Они приведены на рис.6.16, а, б.

а)



б)

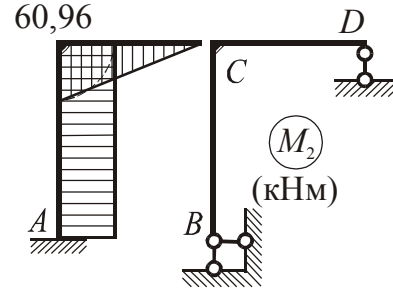


Рис.6.16

Сложив характерные ординаты эпюр  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_p$ , построим окончательную эпюру  $M$  (рис.6.17, а).

Выполним кинематическую проверку правильности решения.

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} dx &= \frac{1}{EJ} \left[ \frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 20 \cdot 4 - 20,04 \cdot 4) - \frac{1}{2} \cdot 7,96 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] - \\ &- \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7,96 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{1}{EJ} (106,7 - 106,5) = \frac{0,2}{EJ}. \end{aligned}$$

$$\text{Относительная погрешность равна: } \Delta \% = \frac{0,2}{106,5} \cdot 100 \% = 0,19 \%.$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_2 M}{EJ} dx &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{20,04 - 20}{2} \cdot 4 \cdot 3 + \frac{1}{3EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot 20,04 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{18 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = \\ &= \frac{1}{EJ} (20,28 - 20,25) = \frac{0,03}{EJ}. \end{aligned}$$

$$\text{Относительная погрешность равна: } \Delta \% = \frac{0,03}{20,25} \cdot 100 \% = 0,15 \%.$$

Вычислительные погрешности малы, эпюра  $M$  построена правильно.

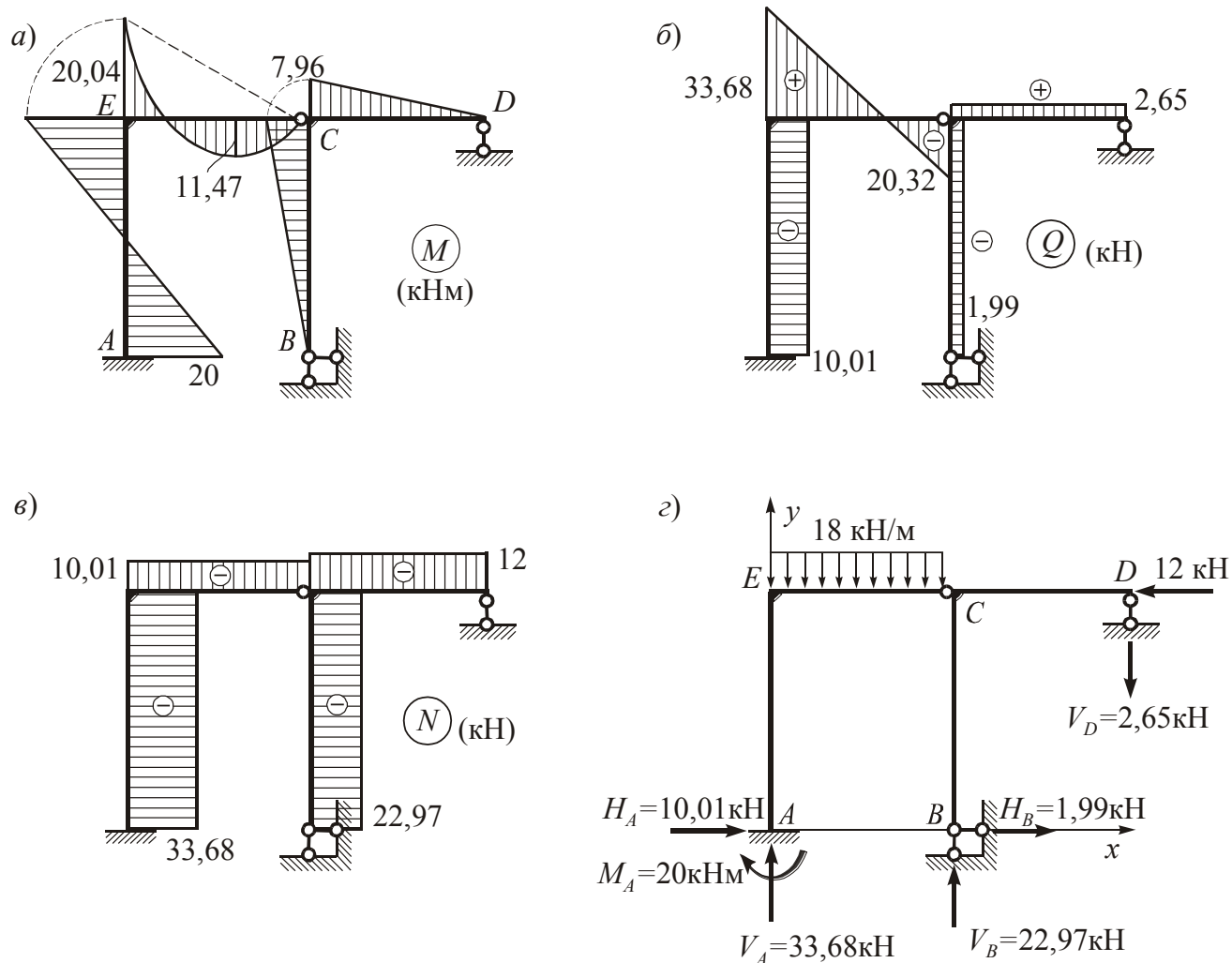


Рис.6.17

Строим эпюру поперечных сил  $Q$  с помощью дифференциального соотношения  $M' = Q$ . Определяем значения  $Q$  в стержнях рамы.

**Стержень AE**

$$Q_A = Q_E = -\frac{20,04 + 20}{4} = -10,01 \text{ кН}.$$

**Стержень CE**

$$Q_E = \frac{ql}{2} + \frac{M_E + M_C}{l} = \frac{18 \cdot 3}{2} + \frac{20,04 + 0}{3} = 33,68 \text{ кН}.$$

$$Q_C = -\frac{ql}{2} + \frac{M_E + M_C}{l} = -\frac{18 \cdot 3}{2} + \frac{20,04 + 0}{3} = -20,32 \text{ кН}.$$

**Стержень BC**

$$Q_B = Q_C = -\frac{7,96}{4} = -1,99 \text{ кН}.$$

**Стержень CD**

$$Q_C = Q_D = \frac{7,96}{3} = 2,65 \text{ кН}.$$

Эпюра  $Q$  приведена на рис.6.17,б.

Определяем значения продольных сил  $N$  в стержнях рамы с помощью уравнений равновесия  $\sum X = 0$  и  $\sum Y = 0$  узлов рамы (рис.6.18,а,б).

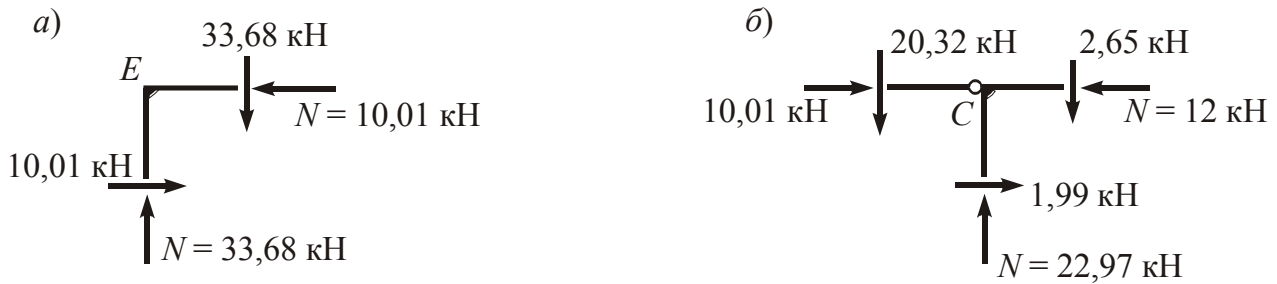


Рис.6.18

Эпюра  $N$  приведена на рис.6.17,в. Определяем по эпюрам  $M$ ,  $Q$  и  $N$  значения опорных реакций (рис.6.17,з) и выполняем статическую проверку равновесия рамы.

$$\sum X = 0, \quad 10,01 + 1,99 - 12 = 12 - 12 = 0;$$

$$\sum Y = 0, \quad -18 \cdot 3 - 2,65 + 33,68 + 22,97 = -56,65 + 56,65 = 0;$$

$$\sum M_C = 0, \quad 18 \cdot 3 \cdot 1,5 + 10,01 \cdot 4 + 1,99 \cdot 4 - 20 - 33,68 \cdot 3 - 2,65 \cdot 3 = 129 - 129 = 0.$$

Рама в целом находится в равновесии.

Определим горизонтальное перемещение шарнирной опоры  $D$ . Для этого построим в принятой основной системе соответствующую единичную эпюру  $\bar{M}_3$  (рис.6.19) и «перемножим» ее с окончательной эпюрой  $M$ .

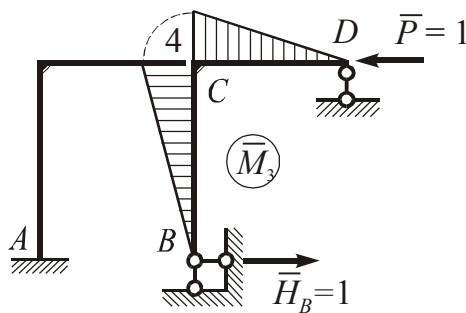


Рис.6.19

$$\Delta_3 = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_3 M}{EJ} dx = \frac{1}{3EJ} \frac{1}{2} \cdot 7,96 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} \cdot 7,96 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{53,07}{EJ}.$$

Опора  $D$  перемещается влево.

## ГЛАВА 7

### РАСЧЕТ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

#### 7.1. Основные определения и формулы

Под упругим основанием в инженерной практике обычно понимают различные грунтовые и скальные среды (массивы), на которые опираются фундаменты зданий, гидротехнические сооружения, дорожные и аэродромные покрытия.

Конструкция на упругом основании находится под действием внешних нагрузок и реактивного отпора основания, непрерывно распределенного по длине или площади контакта. Закон изменения реактивного отпора не может быть определен из уравнений равновесия. Он зависит от свойств упругого основания и характеризуется его расчетной схемой или *моделью*. В инженерной практике наиболее часто используется модель основания Винклера, для которой принимается линейная зависимость между реактивным отпором основания и осадкой его поверхности.

При расчете балок на упругом основании Винклера (рис.7.1) используется формула

$$q_r(x) = kbv(x), \quad (7.1)$$

где:  $q_r(x)$  – реактивный отпор основания,  $v(x)$  – прогиб балки, принимаемый равным осадке поверхности основания,  $b$  – ширина площади контакта балки и основания и  $k$  – коэффициент жесткости основания, называемый в механике грунтов *коэффициентом постели*.

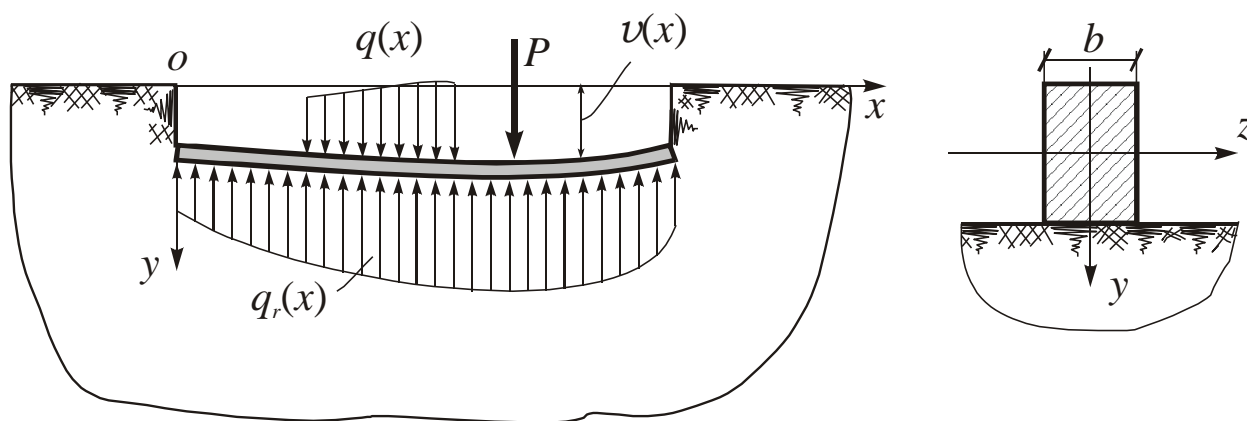


Рис.7.1

Коэффициент постели определяется опытным путем и имеет размерность Н/см<sup>3</sup>, кН/см<sup>3</sup>, МПа/м и т.п.

Дифференциальное уравнение изгиба балки на упругом основании Винклера имеет следующий вид:

$$EJv^{IV}(x) + kbv(x) = q(x), \quad (7.2)$$

где  $EJ$  – жесткость балки при изгибе.

При интегрировании уравнения (7.2) производится замена переменной по формуле:

$$\xi = \lambda x, \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EJ}}. \quad (7.3)$$

Параметр  $\lambda$  характеризует жесткость балки и основания и имеет размерность единицы, деленной на длину (например, 1/см).

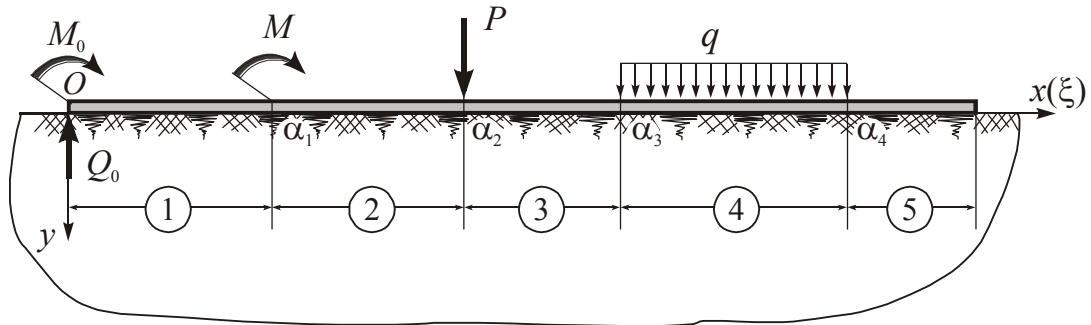


Рис.7.2

Решение уравнения (7.2) в форме метода начальных параметров имеет следующий вид:

$$v(\xi) = v_0 Y_1(\xi) + \frac{\varphi_0}{\lambda} Y_2(\xi) - \frac{M_0}{EJ\lambda^2} Y_3(\xi) - \frac{Q_0}{EJ\lambda^3} Y_4(\xi) \Big|_1 - \frac{M}{EJ\lambda^2} Y_3(\xi - \alpha_1) \Big|_2 + \quad (7.4)$$

$$+ \frac{P}{EJ\lambda^3} Y_4(\xi - \alpha_2) \Big|_3 + \frac{q}{4EJ\lambda^4} [1 - Y_1(\xi - \alpha_3)] \Big|_4 - \frac{q}{4EJ\lambda^4} [1 - Y_1(\xi - \alpha_4)] \Big|_5.$$

Величины  $v_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $M_0$  и  $Q_0$  – называются начальными параметрами и представляют собой прогиб, угол поворота поперечного сечения, изгибающий момент и поперечную силу в начальном сечении балки  $x = 0$  ( $\xi = 0$ ). Функции в выражении (7.4) соответствуют нагрузкам и участкам балки, приведенным на рис.7.2.

Функции  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$  и  $Y_4$  представляют собой линейные комбинации произведений гиперболических и тригонометрических функций. Они называются функциями А.Н. Крылова и определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} Y_1(\xi) &= \text{ch}\xi \cos\xi; \\ Y_2(\xi) &= \frac{1}{2} (\text{ch}\xi \sin\xi + \text{sh}\xi \cos\xi); \\ Y_3(\xi) &= \frac{1}{2} \text{sh}\xi \sin\xi; \\ Y_4(\xi) &= \frac{1}{4} (\text{ch}\xi \sin\xi - \text{sh}\xi \cos\xi). \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Эти функции повторяются при дифференцировании в соответствии с формулами

$$\frac{dY_1}{d\xi} = -4Y_4, \quad \frac{dY_2}{d\xi} = Y_1, \quad \frac{dY_3}{d\xi} = Y_2, \quad \frac{dY_4}{d\xi} = Y_3. \quad (7.6)$$

При  $\xi = 0$   $Y_1(0) = 1$ ,  $Y_2(0) = Y_3(0) = Y_4(0) = 0$ .

Углы поворота поперечных сечений балки, изгибающие моменты и поперечные силы определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi) &= \lambda v'(\xi); \\ M(\xi) &= -EJ\lambda^2 v''(\xi) = -EJ\lambda \varphi'(\xi); \\ Q(\xi) &= \lambda M'(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

В начале расчета всегда известны два начальных параметра из четырех. Неизвестные начальные параметры подлежат определению из граничных условий на противоположном конце балки.

Балка на упругом основании может иметь жёсткие опоры, на которых возникают сосредоточенные опорные реакции.

## 7.2. Примеры решения задач

### Задача 7.1.

Для балки в виде стального прокатного двутавра  $\text{I}20$ , свободно расположенной на поверхности упругого основания (рис.7.3), определим значения прогибов, углов поворота поперечных сечений, изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях балки с шагом  $a = l/10$  и построим эпюры этих величин. В расчетах используем программу для ПК.

Построим эпюру реактивного отпора основания и выполним проверку равновесия балки. Проверим прочность балки по нормальным напряжениям. В расчетах примем  $E = 2,1 \cdot 10^4$  кН/см<sup>2</sup>,  $k = 0,08$  кН/см<sup>3</sup>,  $R = 21$  кН/см<sup>2</sup>,  $\gamma_f = 1,2$ ,  $\gamma_c = 1,0$ .

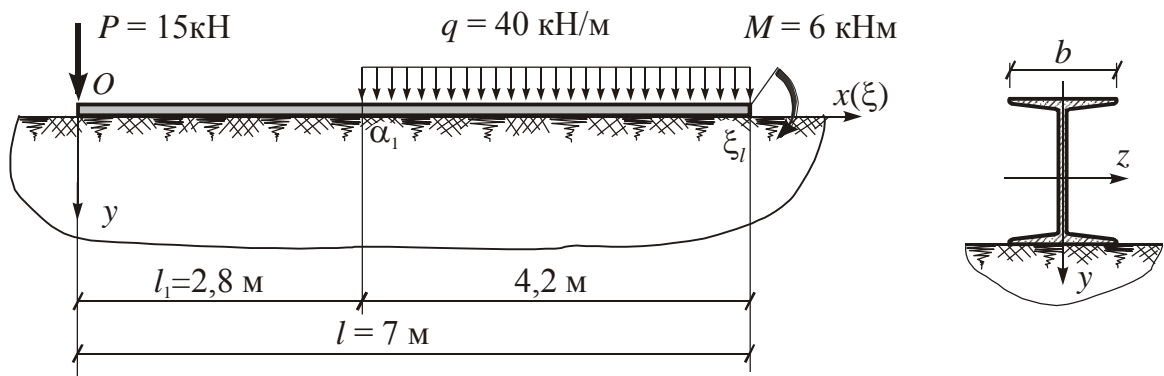


Рис.7.3

Запишем с помощью метода начальных параметров выражение для прогиба балки.

$$v(\xi) = v_0 Y_1(\xi) + \frac{\varphi_0}{\lambda} Y_2(\xi) - \frac{M_0}{EJ\lambda^2} Y_3(\xi) - \frac{Q_0}{EJ\lambda^3} Y_4(\xi) \Big|_1 + \frac{q}{4EJ\lambda^4} [1 - Y_1(\xi - \alpha_1)] \Big|_2.$$

Начальные параметры равны:

$$x = 0 \quad (\xi = 0), \quad M_0 = 0, \quad Q_0 = -P = -15 \text{ кН}.$$



Для определения неизвестных начальных параметров  $\nu_0$  и  $\varphi_0$  используем граничные условия

$$x = l \quad (\xi = \xi_l), \quad M = -6 \text{ кНм} = -6 \cdot 10^2 \text{ кНсм}, \quad Q = 0.$$

Запишем выражения для углов поворота поперечных сечений, изгибающих моментов и поперечных сил.

$$\varphi(\xi) = \lambda \nu'(\xi) = -4\lambda \nu_0 Y_4(\xi) + \varphi_0 Y_1(\xi) + \frac{P}{EJ\lambda^2} Y_3(\xi) \Big|_1 + \frac{q}{EJ\lambda^3} Y_4(\xi - \alpha_1) \Big|_2 ;$$

$$M(\xi) = -EJ\lambda \varphi'(\xi) = 4EJ\lambda^2 \nu_0 Y_3(\xi) + 4EJ\lambda \varphi_0 Y_4(\xi) - \frac{P}{\lambda} Y_2(\xi) \Big|_1 - \frac{q}{\lambda^2} Y_3(\xi - \alpha_1) \Big|_2 ;$$

$$Q(\xi) = \lambda M'(\xi) = 4EJ\lambda^3 \nu_0 Y_2(\xi) + 4EJ\lambda^2 \varphi_0 Y_3(\xi) - PY_1(\xi) \Big|_1 - \frac{q}{\lambda} Y_2(\xi - \alpha_1) \Big|_2 .$$

Выполним числовой расчет. Определим параметр  $\lambda$ .

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{0,08 \cdot 10}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 1840}} = 8,482 \cdot 10^{-3} \text{ 1/см},$$

где:  $J = J_z = 1840 \text{ см}^4$ ,  $b = 10 \text{ см}$  – геометрические характеристики двутавра 120.

Жесткость балки при изгибе равна:

$$EJ = 2,1 \cdot 10^4 \cdot 1840 = 3,864 \cdot 10^7 \text{ кНсм}^2.$$

Вычисляем аргументы функций А.Н. Крылова.

$$\alpha_1 = \lambda l_1 = 8,482 \cdot 10^{-3} \cdot 280 = 2,375 ,$$

$$\xi_l = \lambda l = 8,482 \cdot 10^{-3} \cdot 700 = 5,937 ,$$

$$\xi_l - \alpha_1 = 5,937 - 2,375 = 3,562 .$$

Определяем необходимые для выполнения граничных условий значения функций А.Н. Крылова

$$Y_1(\xi_l) = Y_1(5,937) = 178,2 ,$$

$$Y_2(\xi_l) = Y_2(5,937) = 56,95 ,$$

$$Y_3(\xi_l) = Y_3(5,937) = -32,13 ,$$

$$Y_4(\xi_l) = Y_4(5,937) = -60,61 ,$$

$$Y_2(\xi_l - \alpha_1) = Y_2(3,562) = -11,63 ,$$

$$Y_3(\xi_l - \alpha_1) = Y_3(3,562) = -3,592 .$$

Раскрываем граничные условия. Размерность всех величин переведем в килоньютоны и сантиметры.

$$M(\xi_l) = 4 \cdot 3,864 \cdot 10^7 \cdot (8,482 \cdot 10^{-3})^2 \nu_0 (-32,13) + 4 \cdot 3,864 \cdot 10^7 \cdot 8,482 \cdot 10^{-3} \varphi_0 (-60,61) - \frac{15 \cdot 56,95}{8,482 \cdot 10^{-3}} - \frac{40 \cdot 10^{-2} (-3,592)}{(8,482 \cdot 10^{-3})^2} = -6 \cdot 10^2 ,$$

$$Q(\xi_l) = 4 \cdot 3,864 \cdot 10^7 \cdot (8,482 \cdot 10^{-3})^3 \nu_0 (56,95) + 4 \cdot 3,864 \cdot 10^7 \cdot (8,482 \cdot 10^{-3})^2 \varphi_0 (-32,13) - 15 \cdot 178,2 - \frac{40 \cdot 10^{-2} (-11,63)}{8,482 \cdot 10^{-3}} = 0 .$$

Решаем систему двух алгебраических уравнений.

$$\left. \begin{aligned} -357276\nu_0 - 79458372\varphi_0 &= 80142, \\ 5371,4\nu_0 - 357276\varphi_0 &= 2124,5. \end{aligned} \right\}$$

$$\nu_0 = 0,2528 \text{ см}, \quad \varphi_0 = -2,145 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Далее расчет производим с помощью программы для ПК, составленной на кафедре. Вводим свои данные и получаем решение задачи. Начальные параметры равны:  $\nu_0 = 0,253 \text{ см}$ ,  $\varphi_0 = -2,15 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$ . Результаты расчета практически совпали.

Приводим эпюры  $Q$ ,  $M$ ,  $\varphi$  и  $\nu$ , полученные с помощью компьютерного расчета (рис.7.4).

Определяем ординаты реактивного отпора основания по формуле Винкlera.

$$q_r = kb\nu = 0,08 \cdot 10\nu = 0,8\nu \text{ (кН/см)} = 80\nu \text{ (кН/м)}.$$

$$\begin{aligned} q_0 &= 80 \cdot 0,253 = 20,24 \text{ кН/м}, & q_1 &= 80 \cdot 0,12 = 9,6 \text{ кН/м}, \\ q_2 &= 80 \cdot 0,065 = 5,20 \text{ кН/м}, & q_3 &= 80 \cdot 0,108 = 8,64 \text{ кН/м}, \\ q_4 &= 80 \cdot 0,231 = 18,48 \text{ кН/м}, & q_5 &= 80 \cdot 0,366 = 29,28 \text{ кН/м}, \\ q_6 &= 80 \cdot 0,45 = 36 \text{ кН/м}, & q_7 &= 80 \cdot 0,485 = 38,8 \text{ кН/м}, \\ q_8 &= 80 \cdot 0,499 = 39,92 \text{ кН/м}, & q_9 &= 80 \cdot 0,531 = 42,48 \text{ кН/м}, \\ q_{10} &= 80 \cdot 0,617 = 49,36 \text{ кН/м}. \end{aligned}$$

Эпюра реактивного отпора основания приведена на рис.7.4. Равнодействующая реактивного отпора численно равна площади этой эпюры. Определим приближенное значение равнодействующей, заменив в пределах участков разбиения кривую линию эпюры прямой линией. При этом равнодействующая определяется как сумма площадей трапеций.

$$R = \int_0^l q_r(x) dx \approx \frac{a}{2} [q_0 + 2(q_1 + q_2 + \dots + q_9) + q_{10}] = \frac{0,7}{2} [20,24 + 2 \cdot (9,6 + 5,20 + 8,64 + 18,48 + 29,28 + 36 + 38,8 + 39,92 + 42,48) + 49,36] = 184,2 \text{ кН}.$$

Выполним проверку равновесия балки.

$$\Sigma Y = 15 + 40 \cdot 4,2 - R = 183 - 184,2 = -1,2 \text{ кН}.$$

Относительная погрешность составляет:

$$\Delta\% = \frac{1,2}{183} \cdot 100\% = 0,66\%.$$

Расчетное значение наибольшего изгибающего момента равно:

$$M_p = M_n \gamma_f = 8,009 \cdot 1,2 = 9,61 \text{ кНм}.$$

Выполняем проверку условия прочности

$$\sigma_{нб} = \frac{M_p}{W_z} = \frac{9,61 \cdot 10^2}{184} = 5,22 \text{ кН/см}^2 < \gamma_c R = 21 \text{ кН/см}^2,$$

где  $W_z = 184 \text{ см}^3$  – момент сопротивления двутавра I20.

Условие прочности выполняется.

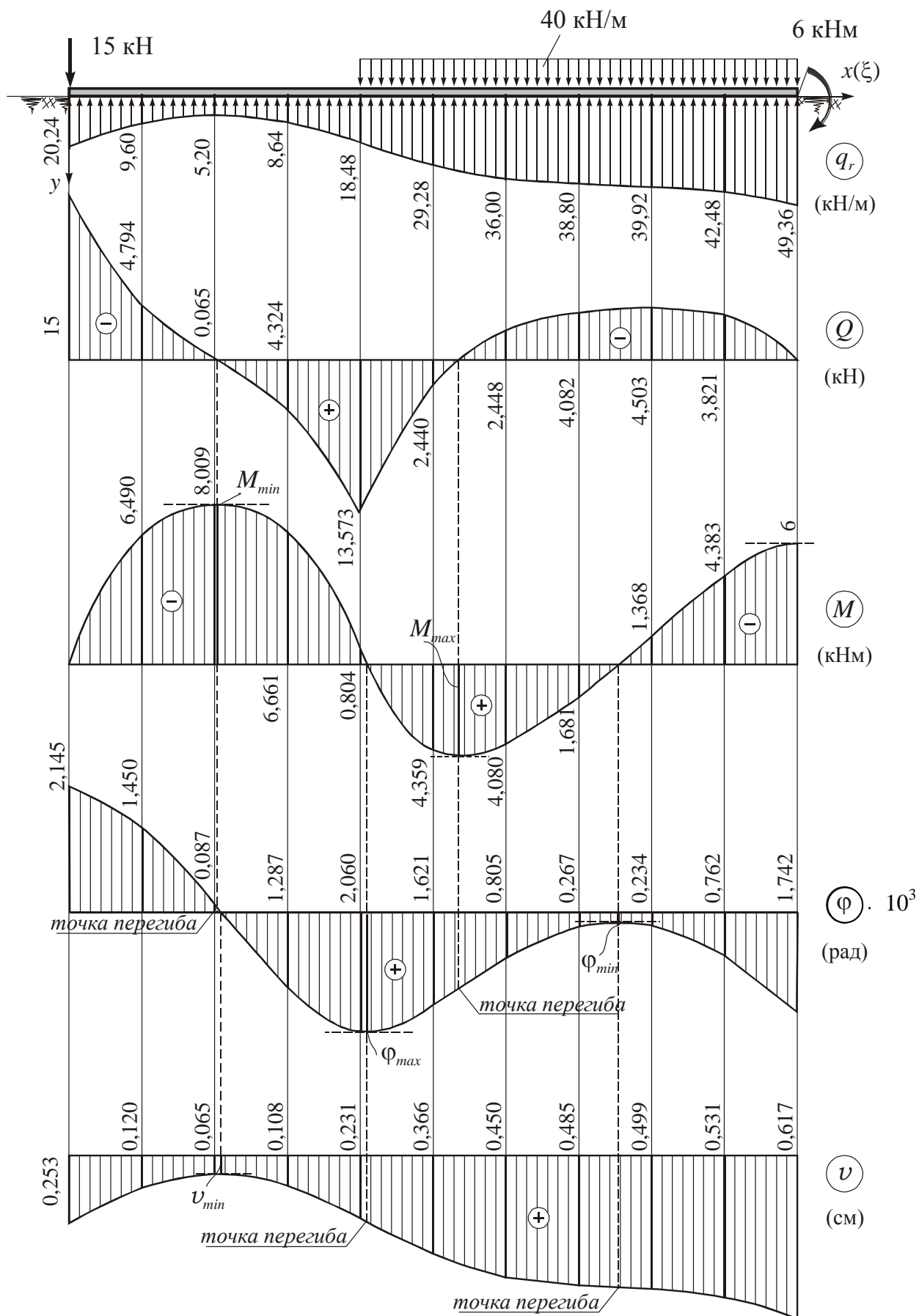


Рис.7.4

## ГЛАВА 8

### КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

#### 8.1. Основные определения и формулы

Кручение стержня вызывается действием пар сил (моментов), расположенных в плоскостях, перпендикулярных к его оси. В поперечных сечениях стержня при кручении возникает только одно внутреннее усилие – крутящий момент  $M_k = M_x$ . Для его определения используется метод сечений. Применим этот метод для расчета стержня, находящегося под действием сосредоточенных и распределенных скручивающих нагрузок (рис.8.1,а).

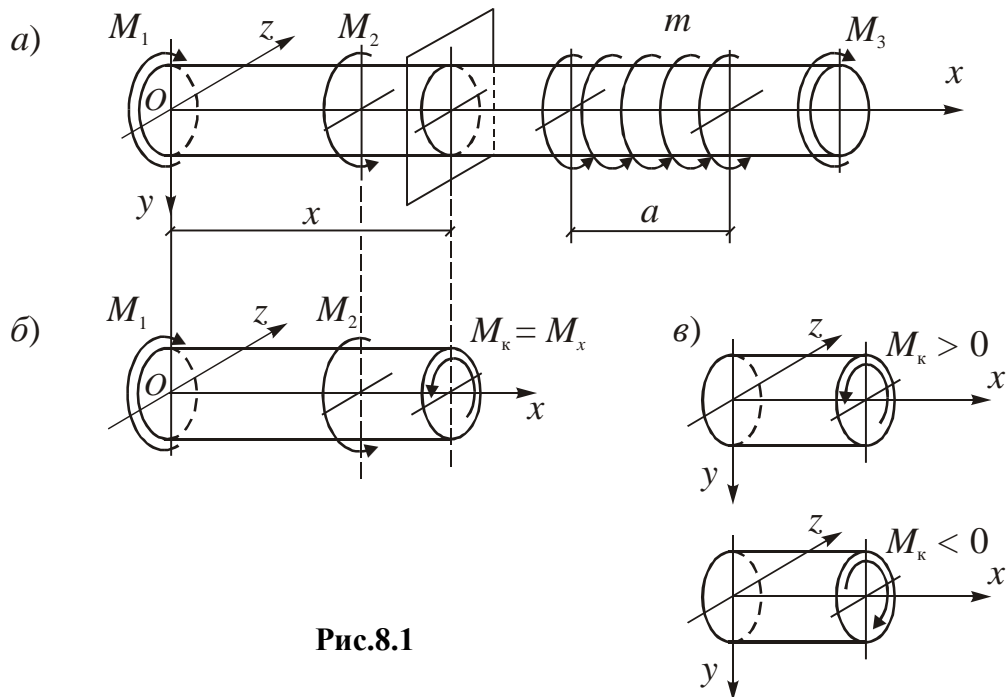


Рис.8.1

Рассмотрев равновесие левой части стержня (рис.8.1,б), получим:

$$\sum M_x = 0; \quad -M_1 + M_2 + M_k = 0; \quad M_k = M_1 - M_2.$$

Таким образом, крутящий момент равен сумме скручивающих моментов, приложенных к одной из частей стержня. При наличии распределенной скручивающей нагрузки  $t$  надо определить ее равнодействующий момент  $M$ . Для равномерно распределенной нагрузки  $t = \text{const}$  он равен  $M = ta$ , где  $a$  – длина участка распределения.

Крутящий момент принимается положительным, если он стремится повернуть оставшуюся часть стержня против хода часовой стрелки (рис.8.1,в).

Между крутящим моментом и интенсивностью распределенной скручивающей нагрузки  $t$  имеет место дифференциальная зависимость:

$$\frac{dM_k}{dx} = -t. \quad (8.1)$$

Эта зависимость используется при построении эпюры крутящих моментов. В частности, на участках, где  $t = 0$ , крутящий момент имеет постоянное зна-

чение  $M_k = \text{const}$ , а на участках с равномерно распределенной скручивающей нагрузкой  $m = \text{const}$  крутящий момент изменяется по линейному закону.

Деформация стержня круглого и кольцевого сечений при кручении характеризуется взаимным поворотом поперечных сечений (рис.8.2). При этом поперечные сечения остаются плоскими и перпендикулярными к оси (гипотеза плоских сечений). В поперечных сечениях возникают только касательные напряжения, связанные с деформациями сдвига  $\gamma$  законом Гука при сдвиге

$$\tau = G\gamma, \quad (8.2)$$

где  $G$  – модуль сдвига, определяемый по формуле

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (8.3)$$

Касательные напряжения в поперечных сечениях стержней круглого и кольцевого сечений определяются по формуле

$$\tau = \frac{M_k}{J_p} r, \quad (8.4)$$

где  $r$  – переменный радиус и  $J_p$  – полярный момент инерции поперечного стержня, определяемый для сплошного и кольцевого сечений по формулам

$$J_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}; \quad (8.5)$$

$$J_p = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4) = \frac{\pi}{32} (D_2^4 - D_1^4), \quad (8.6)$$

где  $D_1$  и  $D_2$  – соответственно внутренний и внешний диаметры кольца.

Характер эпюр касательных напряжений для стержня сплошного и кольцевого сечений показан на рис.8.3, а, б.

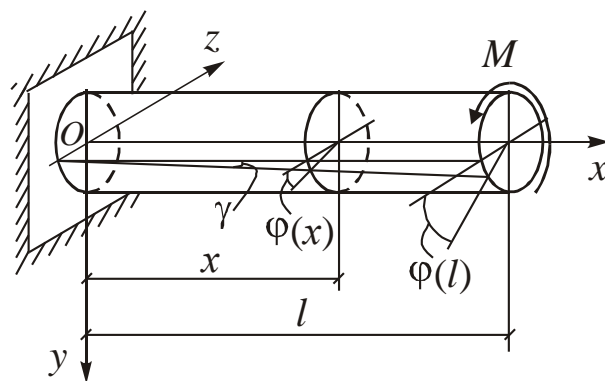


Рис.8.2

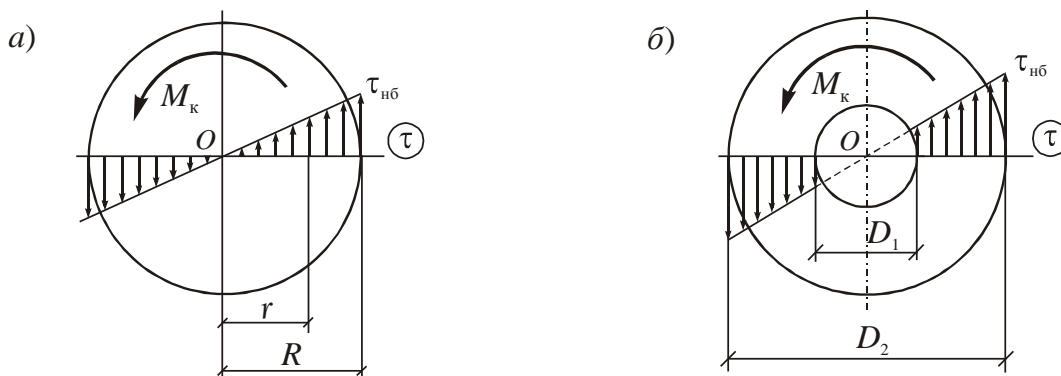


Рис.8.3

Касательные напряжения направлены перпендикулярно к радиусу и изменяются вдоль него по линейному закону. Наибольшие напряжения возникают в точках на поверхности стержня и определяются по формуле

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_{\kappa}}{W_p}, \quad (8.7)$$

где  $W_p$  – полярный момент сопротивления, определяемый для стержня сплошного и кольцевого сечений по формулам

$$W_p = \frac{J_p}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}; \quad (8.8)$$

$$W_p = \frac{J_p}{R_2} = \frac{\pi}{2R_2} (R_2^4 - R_1^4) = \frac{\pi}{16D_2} (D_2^4 - D_1^4). \quad (8.9)$$

При расчете стержней кольцевого сечения удобно ввести соотношение  $k = R_1/R_2 = D_1/D_2$  и принять  $D_2 = D$ . При этом получим:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - k^4); \quad (8.10)$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - k^4). \quad (8.11)$$

Угол взаимного поворота поперечных сечений (угол закручивания стержня) в общем случае определяется по формуле

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \int_0^x \frac{M_{\kappa}}{GJ_p} dx, \quad (8.12)$$

где  $\varphi_0$  – угол поворота начального сечения. Если начальное сечение закреплено, то  $\varphi_0 = 0$ . Произведение  $GJ_p$  называется жесткостью стержня при кручении.

Для частного случая  $\varphi_0 = 0$ ,  $M_{\kappa} = \text{const}$  и  $GJ_p = \text{const}$  получим:

$$\varphi(x) = \frac{M_{\kappa} x}{GJ_p}, \quad \varphi_l = \varphi(l) = \frac{M_{\kappa} l}{GJ_p}, \quad (8.13)$$

где  $l$  – длина стержня.

Для стержней с постоянной или ступенчато постоянной жесткостью  $GJ_p = \text{const}$  имеем

$$\varphi(l) = \frac{1}{GJ_p} \int_0^l M_{\kappa} dx = \frac{1}{GJ_p} \Omega_{M_{\kappa}}, \quad (8.14)$$

где  $\Omega_{M_{\kappa}}$  – площадь эпюры крутящего момента, наиболее просто определяемая при линейном законе его изменения.

Элементы конструкции, работающие на кручение, наиболее часто встречаются в машиностроении, где основным методом расчета на прочность является метод допускаемых напряжений. Условие прочности при кручении стержней круглого сечения имеет следующий вид:

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p} \leq [\tau], \quad (8.15)$$

где  $[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение. Условие прочности позволяет определить требуемый диаметр стержня круглого сплошного или кольцевого сечений:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{к}}}{\pi[\tau](1-k^4)}}. \quad (8.16)$$

При  $k = 0$  имеем стержень сплошного сечения, а при  $k < 1$  определяется внешний диаметр стержня кольцевого сечения  $D_2 = D$ .

Стержни, работающие на кручение, должны обладать достаточной жесткостью. Условие жесткости при кручении имеет следующий вид:

$$\varphi'_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{к}}}{GJ_p} \leq [\varphi'], \quad (8.17)$$

где  $[\varphi']$  – допускаемый относительный угол закручивания (угол закручивания на единицу длины стержня). Он принимается в пределах  $[\varphi'] = (0,15 \div 2)$  град/м.

Условие жесткости также позволяет определить требуемый диаметр стержня

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{\text{к}}}{\pi G(1-k^4)[\varphi']}}. \quad (8.18)$$

При расчете стержня на прочность и жесткость принимается больший из двух требуемых диаметров.

## 8.2. Примеры решения задач

### Задача 8.1.

Для стального стержня круглого сплошного ступенчато-постоянного сечения, находящегося под действием показанных на рис.8.4,а скручивающих нагрузок, построим эпюру крутящих моментов. Выполним подбор сечения стержня из условий прочности и жёсткости. Построим эпюру касательных напряжений в опасных сечениях участков стержня. Построим эпюру углов закручивания. В расчётах примем  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 0,8 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$ ,  $[\varphi'] = 1 \text{ град/м} = 1,75 \cdot 10^{-4} \text{ рад/см}$ ,  $[\tau] = 80 \text{ МПа} = 8 \text{ кН/см}^2$  и  $k = D_1/D = 0,8$ .

Поскольку стержень имеет одно закреплённое сечение, он является статически определимым. Определим значения крутящих моментов в сечениях, начиная со свободного конца.

$$\text{Сечение } x = 70 \text{ см,} \quad M_{\text{к}} = 0,2 \text{ кНм.}$$

$$\text{Сечение } x = 40 \text{ см,} \quad M_{\text{к}}^{\text{пр}} = 0,2 \text{ кНм,}$$

$$M_{\text{к}}^{\text{лев}} = 0,2 - 0,5 = -0,3 \text{ кНм.}$$

$$\text{Сечение } x = 20 \text{ см,} \quad M_{\text{к}} = -0,3 \text{ кНм.}$$

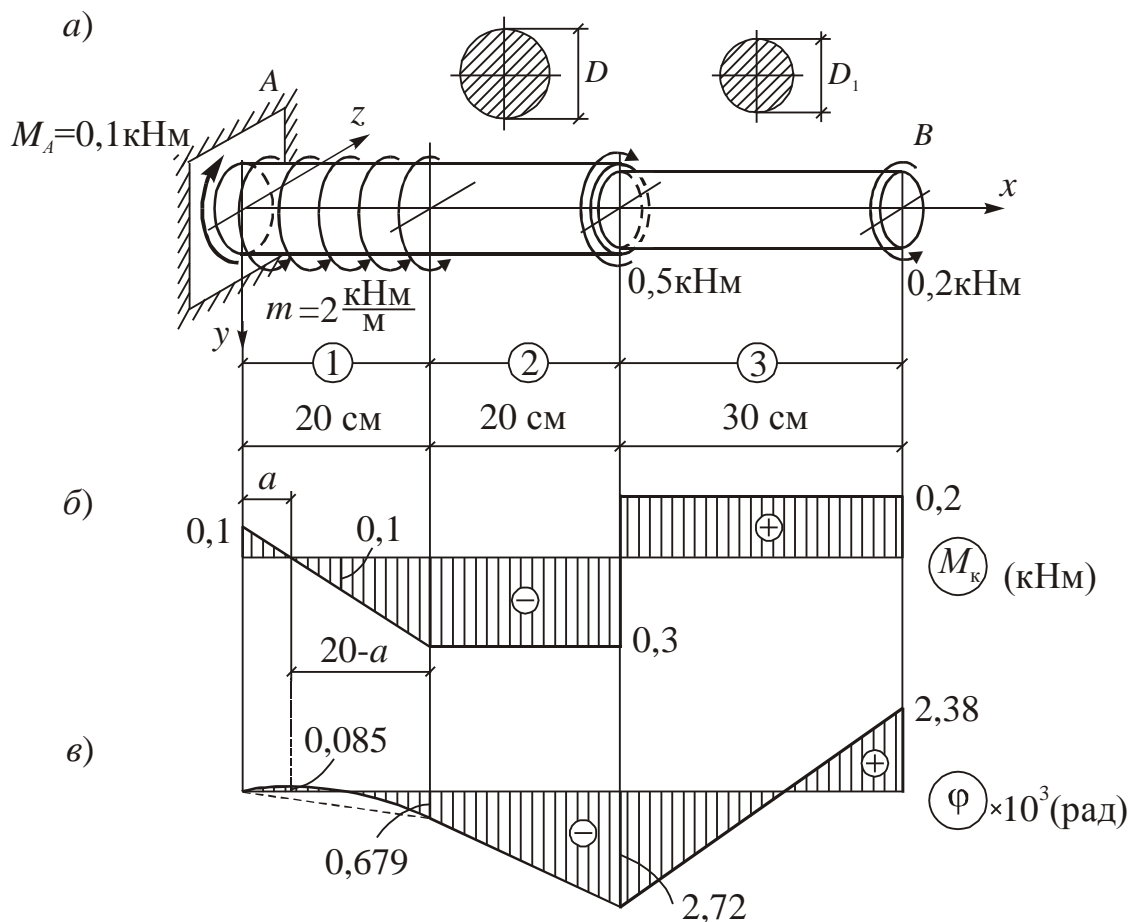


Рис.8.4

Сечение  $x = 0$ ,

$$M_k = -0,3 + 2 \cdot 0,2 = 0,1 \text{ кНм.}$$

В пределах 2-го и 3-го участков крутящий момент имеет постоянное значение, а на границе этих участков (сечение  $x = 40\text{см}$ ) имеет место скачок крутящего момента на величину  $0,5 \text{ кНм}$ . В пределах 1-го участка крутящий момент изменяется по линейному закону. Эпюра крутящих моментов приведена на рис.8.4,б. Реактивный момент в закреплённом сечении равен  $M_A = 0,1 \text{ кНм}$ .

Выполним подбор сечения стержня из условий прочности и жёсткости. Наиболее опасными являются 2-ой и 3-й участки. Определим требуемые диаметры стержня по формулам (8.16) и (8.18).

#### Участок 2.

Из условия прочности получаем:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_k}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,3 \cdot 10^2}{\pi \cdot 8}} = 2,67 \text{ см.}$$

Из условия жёсткости находим:

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_k}{\pi G[\varphi']}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0,3 \cdot 10^2}{\pi \cdot 0,8 \cdot 10^4 \cdot 1,75 \cdot 10^{-4}}} = 3,84 \text{ см.}$$

#### Участок 3.

Из условия прочности получаем:



$$D_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,2 \cdot 10^2}{\pi \cdot 8}} = 2,34 \text{ см}, \quad D = \frac{D_1}{k} = \frac{2,34}{0,8} = 2,92 \text{ см}.$$

Из условия жёсткости:

$$D_1 \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0,2 \cdot 10^2}{\pi \cdot 0,8 \cdot 10^4 \cdot 1,75 \cdot 10^{-4}}} = 3,47 \text{ см}, \quad D = \frac{3,47}{0,8} = 4,34 \text{ см}.$$

Принимаем с округлением бóльшие размеры

$$D = 4,4 \text{ см}, \quad D_1 = 3,5 \text{ см}.$$

Определим геометрические характеристики поперечных сечений стержня и величины наибольших касательных напряжений.

Участок 2.

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi \cdot 4,4^4}{32} = 36,8 \text{ см}^4, \quad W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} = \frac{\pi \cdot 4,4^3}{16} = 16,7 \text{ см}^3,$$

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_{\kappa}}{W_p} = \frac{0,3 \cdot 10^2}{16,7} = 1,8 \text{ кН/см}^2 < [\tau] = 8 \text{ кН/см}^2.$$

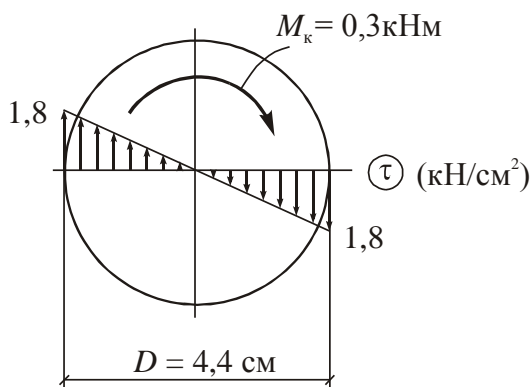
Участок 3.

$$J_p = \frac{\pi \cdot 3,5^4}{32} = 14,7 \text{ см}^4, \quad W_p = \frac{\pi \cdot 3,5^3}{16} = 8,42 \text{ см}^3,$$

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{0,2 \cdot 10^2}{8,42} = 2,38 \text{ кН/см}^2 < [\tau] = 8 \text{ кН/см}^2.$$

Условие прочности стержня выполняется. Построим эпюры касательных напряжений в сечениях на втором и третьем участках (рис.8,5,а,б).

а) Участок 2



б) Участок 3

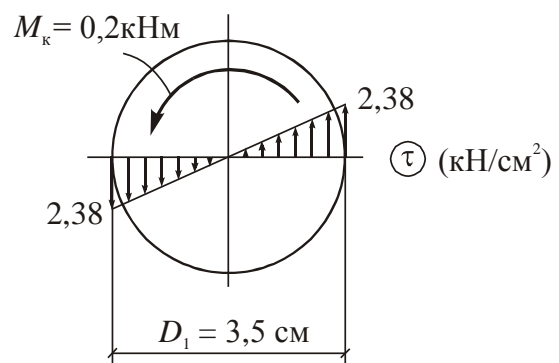


Рис.8.5

Определим углы поворота сечений стержня.

Сечение  $x = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$  (сечение закреплено).

Сечение  $x = 20 \text{ см}$ ,

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{M_{\kappa}^{\text{сп}} \cdot l}{GJ_p} = -\frac{0,1 \cdot 10^2 \cdot 20}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 36,8} = -0,679 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = -0,039^\circ.$$

Сечение  $x = 40\text{см}$ ,

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{M_{\kappa} l}{GJ_p} = -0,679 \cdot 10^{-3} - \frac{0,3 \cdot 10^2 \cdot 20}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 36,8} = -2,72 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = -0,156^\circ.$$

Сечение  $x = 70\text{см}$ ,

$$\varphi_3 = \varphi_l = \varphi_2 + \frac{M_{\kappa} l}{GJ_p} = -2,72 \cdot 10^{-3} + \frac{0,2 \cdot 10^2 \cdot 30}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 14,7} = 2,38 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,136^\circ.$$

Сечения, соответствующие границам участков, поворачиваются по ходу часовой стрелки, а свободное торцевое сечение – против хода часовой стрелки.

Построим эпюру углов закручивания стержня (рис.8,4,в). В пределах 1-го участка углы закручивания изменяются по закону квадратной параболы, а в пределах 2-го и 3-го участков – по линейному закону. В сечении на 1-м участке, где  $M_{\kappa} = 0$ , угол закручивания имеет экстремум  $\varphi_{\max}$ . Находим положение этого сечения из подобия треугольников.

$$\frac{0,1}{a} = \frac{0,3}{20 - a}; \quad a = 5\text{см}.$$

Экстремальное значение  $\varphi_{\max}$  равно:

$$\varphi_{\max} = \varphi_0 + \frac{1}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 36,8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 10^2 \cdot 5 = 0,085 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,0049^\circ.$$

Сечение  $x = 5\text{см}$  поворачивается против хода часовой стрелки.

### Задача 8.2.

Для стального стержня ступенчато-постоянного сечения (сплошная и трубчатая части), находящегося под действием показанных на рис.8,6,а скручивающих нагрузок, построим эпюру крутящих моментов. Выполним подбор сечения стержня из условий прочности и жёсткости. Построим эпюры касательных напряжений в опасных сечениях стержня и эпюру углов закручивания. В расчётах примем  $[\tau] = 80\text{МПа} = 8\text{кН/см}^2$ ,  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 0,8 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$ ,  $[\varphi'] = 1,2 \text{ град/м} = 2,09 \cdot 10^{-4} \text{ рад/см}$  и  $k = D_1/D = 0,7$ .

Стержень является статически определимым. Определим значения крутящих моментов в сечениях стержня.

Сечение  $x = 90\text{см}$ ,

$$M_{\kappa} = 0.$$

Сечение  $x = 50\text{см}$ ,

$$M_{\kappa} = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24 \text{ кНм}.$$

Сечение  $x = 25\text{см}$ ,

$$M_{\kappa}^{\text{пр}} = 0,24 \text{ кНм},$$

$$M_{\kappa}^{\text{лев}} = 0,24 - 0,7 = -0,46 \text{ кНм}.$$

Сечение  $x = 0$ ,

$$M_{\kappa} = -0,46 \text{ кНм}.$$

В пределах 1-го и 2-го участков стержня крутящий момент является постоянным по величине. В сечении на границе этих участков крутящий момент имеет скачок на величину  $M = 0,7 \text{ кНм}$ . В пределах 3-го участка крутящий момент изменяется по линейному закону. Эпюра крутящих моментов приведена на рис.8.6,б. Реактивный момент в закреплённом сечении равен  $M_A = 0,46 \text{ кНм}$ .

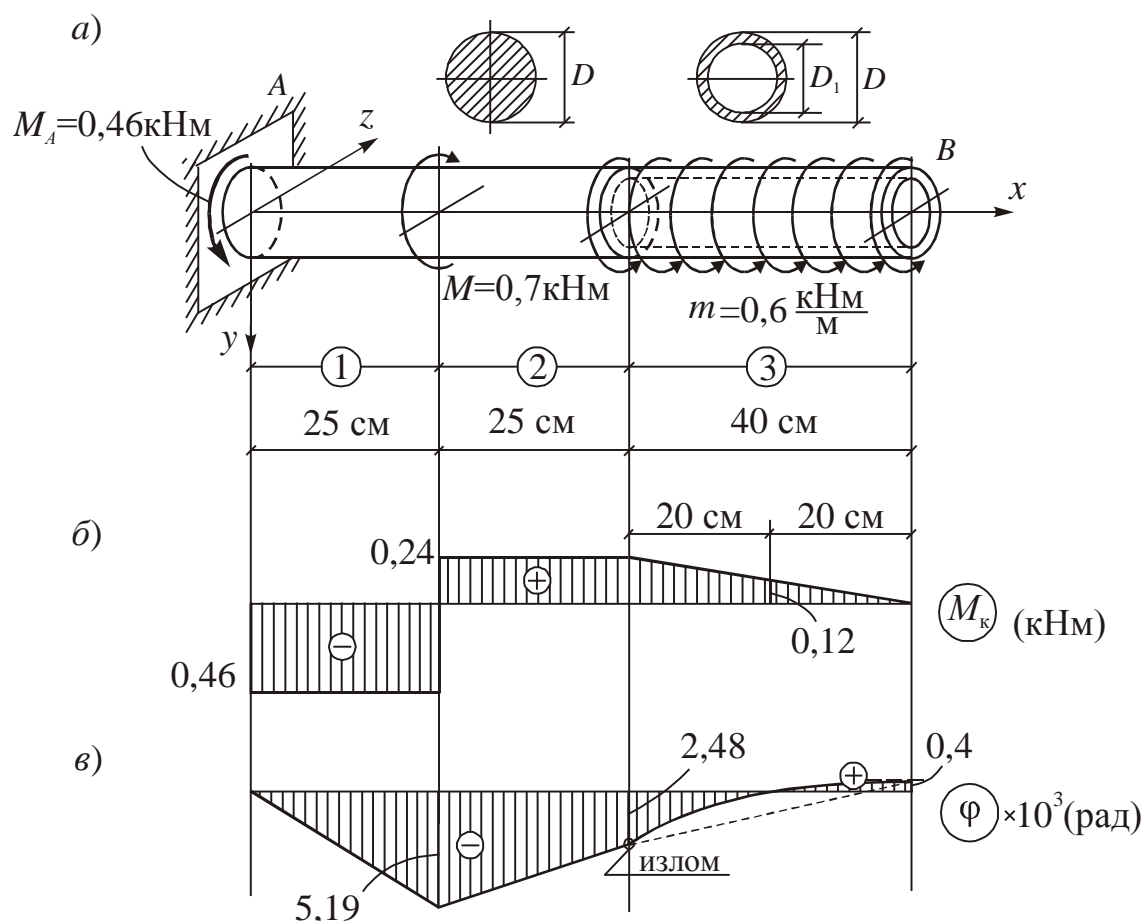


Рис.8.6

Определим требуемый диаметр стержня из условий прочности и жёсткости по формулам (8.16) и (8.18).

Участок 1.

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{\kappa}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,46 \cdot 10^2}{\pi \cdot 8}} = 3,08 \text{ см};$$

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{\kappa}}{\pi G[\varphi']}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0,46 \cdot 10^2}{\pi \cdot 0,8 \cdot 10^4 \cdot 2,09 \cdot 10^{-4}}} = 4,09 \text{ см}.$$

Участок 3 (Сечение  $x = 50 \text{ см}$ )

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\kappa}}{\pi[\tau](1-k^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,24 \cdot 10^2}{\pi \cdot 8(1-0,7^4)}} = 2,72 \text{ см};$$

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{\kappa}}{\pi G[\varphi'](1-k^4)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0,24 \cdot 10^2}{\pi \cdot 0,8 \cdot 10^4 \cdot 2,09 \cdot 10^{-4}(1-0,7^4)}} = 3,72 \text{ см}.$$

Принимаем с округлением больший диаметр  $D = 4,1 \text{ см}$  и внутренний диаметр трубчатой части  $D_1 = 0,7 \cdot 4,1 = 2,9 \text{ см}$ .

Определим геометрические характеристики поперечных сечений стержня и значения наибольших касательных напряжений в опасных сечениях 1-го и 3-го участков. Проверим выполнение условий прочности и жесткости.

#### Участок 1

$$J_p = \frac{\pi \cdot 4,1^4}{32} = 27,7 \text{ см}^4,$$

$$W_p = \frac{\pi \cdot 4,1^3}{16} = 13,5 \text{ см}^3;$$

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_{\kappa}}{W_p} = \frac{0,46 \cdot 10^2}{13,5} = 3,4 \text{ кН/см}^2 < [\tau] = 8 \text{ кН/см}^2;$$

$$\varphi' = \frac{M_{\kappa}}{GJ_p} = \frac{0,46 \cdot 10^2}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 27,7} = 2,08 \cdot 10^{-4} \text{ рад/см} < [\varphi'] = 2,09 \cdot 10^{-4} \text{ рад/см}.$$

#### Участок 3

$$J_p = \frac{\pi}{32} (4,1^4 - 2,9^4) = 20,8 \text{ см}^4, \quad W_p = \frac{20,8}{2,05} = 10,1 \text{ см}^3;$$

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_{\kappa}}{W_p} = \frac{0,24 \cdot 10^2}{10,1} = 2,37 \text{ кН/см}^2 < [\tau] = 8 \text{ кН/см}^2;$$

$$\varphi' = \frac{M_{\kappa}}{GJ_p} = \frac{0,24 \cdot 10^2}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 20,8} = 1,44 \cdot 10^{-4} \text{ рад/см} < [\varphi'] = 2,09 \cdot 10^{-4} \text{ рад/см}.$$

Условия прочности и жесткости стержня выполняются. Эпюры касательных напряжений в опасных сечениях сплошной и трубчатой частей приведены на рис.8.7, а, б.

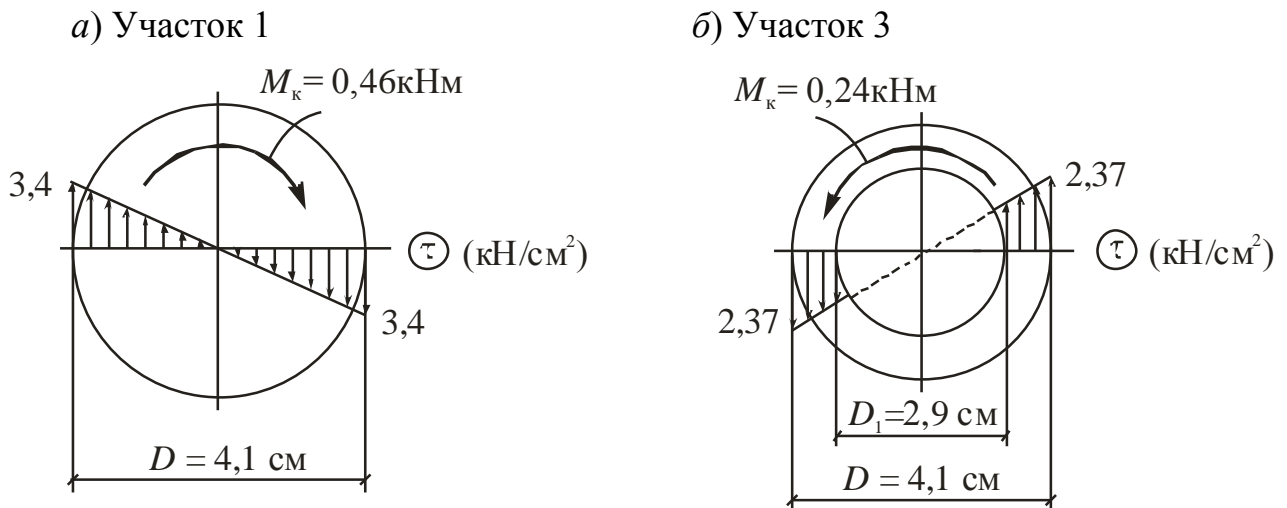


Рис.8.7

Определим углы поворота сечений стержня (углы закручивания).

Сечение  $x = 0$ ,  $\varphi_0 = \varphi_A = 0$  (сечение закреплено).

Сечение  $x = 25 \text{ см}$ ,

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{M_{\kappa} l}{GJ_p} = 0 - \frac{0,46 \cdot 10^2 \cdot 25}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 27,7} = -5,19 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = -0,297^\circ.$$

Сечение  $x = 50\text{см}$ ,

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{M_k l}{GJ_p} = -5,19 \cdot 10^{-3} + \frac{0,24 \cdot 10^2 \cdot 25}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 27,7} = -2,48 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = -0,142^\circ.$$

Сечение  $x = 90\text{см}$ ,

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \frac{M_k^{\text{сп}} l}{GJ_p} = -2,48 \cdot 10^{-3} + \frac{0,12 \cdot 10^2 \cdot 40}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 20,8} = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,023^\circ.$$

В пределах 1-го и 2-го участков углы закручивания стержня изменяются по линейному закону, а в пределах 3-го участка – по закону квадратной параболы. Сечения, соответствующие границам участков, поворачиваются по ходу часовой стрелки, а свободное торцевое сечение – против хода часовой стрелки. Эпюра углов закручивания приведена на рис.8.7,в. В сечении на свободном торце касательная к эпюре  $\varphi$  параллельна к оси стержня ( $M_k = 0$ ).

### Задача 8.3.

Для стального стержня ступенчато-постоянного сечения, закрепленного на торцах и находящегося под действием показанных на рис.8.8,а скручивающих нагрузок, построим эпюру крутящих моментов. Выполним подбор сечения стержня из условий прочности и жесткости. Построим эпюры касательных напряжений в опасных сечениях стержня и эпюру углов закручивания. В расчетах примем  $M = 0,1 \text{ кНм}$ ,  $[\tau] = 80 \text{ МПа} = 8 \text{ кН/см}^2$ ,  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 0,8 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$ ,  $[\varphi'] = 2 \text{ град/м} = 3,49 \cdot 10^{-4} \text{ рад/см}$  и  $k = D_1/D = 0,75$ .

Составим уравнение равновесия стержня:

$$\sum M_x = 0, \quad M_A - M - 2M + M_B = 0, \quad M_A + M_B = 3M,$$

где  $M_A$  и  $M_B$  – реактивные моменты в закрепленных сечениях.

Имеем одно уравнение с двумя неизвестными. Стержень является один раз статически неопределимым и для его расчета надо использовать условие равенства нулю взаимного угла поворота закрепленных торцевых сечений  $\varphi_A = \varphi_B = 0$ .

Отбросим мысленно одно из закреплений, например, правое, и введем в сечении  $B$  неизвестный момент  $X = M_B$  (рис.8.8,б). Используем принцип независимости действия сил и приравняем к нулю угол поворота правого торцевого сечения от совместного действия заданных моментов и неизвестного момента  $X$ :

$$\varphi_B = \varphi_{BM} + \varphi_{BX} = 0.$$

Поскольку соотношение диаметров стержня задано  $k = D_1/D$  ( $D_1 = kD$ ), жесткости стержня на участках 1, 2 и на участке 3 соответственно равны  $k^4 GJ_p$  и  $GJ_p$ . Произведя расчет статически определимого стержня (рис.8.8.б) на действие заданных моментов и искомого момента  $X = M_B$ , получим:

$$\begin{aligned} \varphi_{BM} &= -\frac{2M \cdot 30}{k^4 GJ_p} - \frac{M \cdot 15}{k^4 GJ_p} = -\frac{75M}{k^4 GJ_p}; \\ \varphi_{BX} &= \frac{X \cdot 40}{GJ_p} + \frac{X \cdot 30}{k^4 GJ_p} = \frac{X}{GJ_p} \left(40 + \frac{30}{k^4}\right). \end{aligned}$$

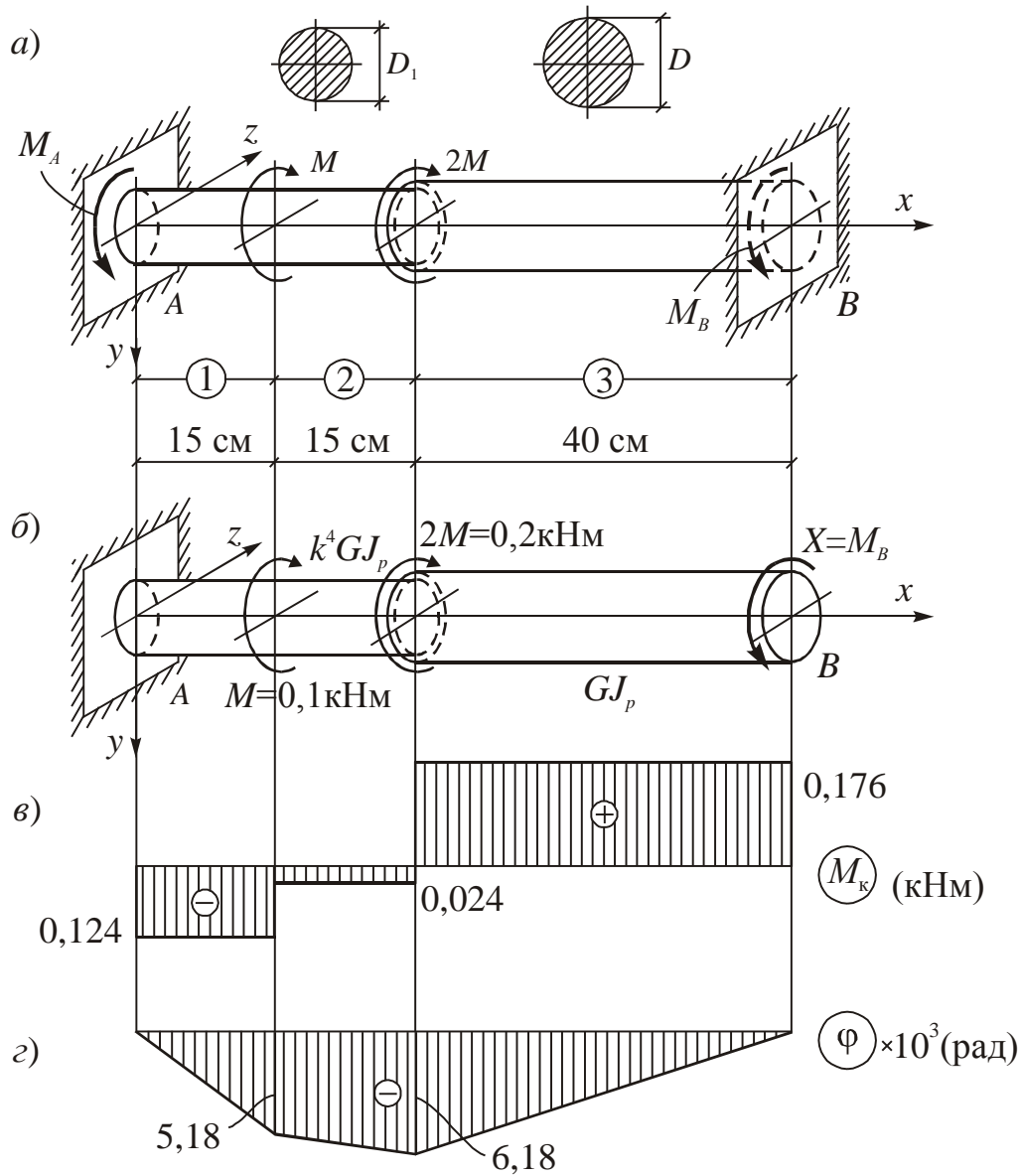


Рис.8.8

Используем условие деформации стержня.

$$\varphi_B = -\frac{75M}{k^4 GJ_p} + \frac{X}{GJ_p} \left(40 + \frac{30}{k^4}\right) = 0.$$

Учитывая, что  $k = 0,75$ , находим:

$$X = M_B = \frac{75M}{k^4 \left(40 + \frac{30}{k^4}\right)} = \frac{75 \cdot 0,1}{0,75^4 \left(40 + \frac{30}{0,75^4}\right)} = 0,176 \text{ кНм.}$$

Реактивный момент в сечении  $A$  равен:

$$M_A = 3M - M_B = 3 \cdot 0,1 - 0,176 = 0,124 \text{ кНм.}$$

Статическая неопределимость стержня раскрыта. Определим значения крутящего момента в сечениях стержня.

Сечение  $x = 70 \text{ см}$ ,

$$M_k = M_B = 0,176 \text{ кНм.}$$

Сечение  $x = 30 \text{ см}$ ,

$$M_k^{\text{np}} = 0,176 \text{ кНм,}$$

$$M_k^{\text{лев}} = 0,176 - 2 \cdot 0,1 = -0,024 \text{ кНм.}$$

Сечение  $x=15\text{см}$ ,

$$M_{\kappa}^{\text{пр}} = -0,024 \text{ кНм},$$

$$M_{\kappa}^{\text{лев}} = -0,124 \text{ кНм}.$$

Сечение  $x=0$ ,

$$M_{\kappa} = -0,124 \text{ кНм}.$$

Эпюра крутящих моментов приведена на рис.8.8,в. Она состоит из трех прямоугольников со скачками на величины приложенных моментов.

Определим требуемые диаметры стержня  $D_1$  и  $D$  из условий прочности и жесткости стержня на 1-ом и 3-м участках. Используем формулы (8.16) и (8.18).

Участок 1

$$D_1 = kD \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{\kappa}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,124 \cdot 10^2}{\pi \cdot 8}} = 1,99 \text{ см};$$

$$D \geq \frac{1,99}{0,75} = 2,65 \text{ см};$$

$$D_1 = kD \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{\kappa}}{\pi \cdot G[\varphi']}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0,124 \cdot 10^2}{\pi \cdot 0,8 \cdot 10^4 \cdot 3,49 \cdot 10^{-4}}} = 2,59 \text{ см};$$

$$D \geq \frac{D_1}{k} = \frac{2,59}{0,75} = 3,46 \text{ см}.$$

Участок 3

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,176 \cdot 10^2}{\pi \cdot 8}} = 2,24 \text{ см};$$

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0,076 \cdot 10^2}{\pi \cdot 0,8 \cdot 10^4 \cdot 3,49 \cdot 10^{-4}}} = 2,83 \text{ см}.$$

Принимаем с округлением бóльшие диаметры  $D_1 = 2,6 \text{ см}$  и  $D = 3,5 \text{ см}$ .

Определим геометрические характеристики поперечных сечений стержня и значения наибольших касательных напряжений на 1-м и 3-м участках. Проверим выполнение условий прочности и жесткости стержня.

Участок 1

$$J_p = \frac{\pi \cdot 2,6^4}{32} = 4,49 \text{ см}^4,$$

$$W_p = \frac{\pi \cdot 2,6^3}{16} = 3,45 \text{ см}^3,$$

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_{\kappa}}{W_p} = \frac{0,124 \cdot 10^2}{3,45} = 3,59 \text{ кН/см}^2 < [\tau] = 8 \text{ кН/см}^2,$$

$$\varphi' = \frac{M_{\kappa}}{GJ_p} = \frac{0,124 \cdot 10^2}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 4,49} = 3,45 \cdot 10^{-4} \text{ рад/см} < [\varphi'] = 3,49 \cdot 10^{-4} \text{ рад/см}.$$

Участок 3

$$J_p = \frac{\pi \cdot 3,5^4}{32} = 14,7 \text{ см}^4,$$

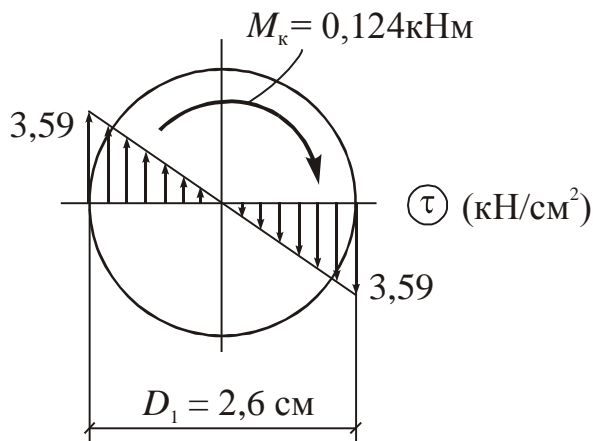
$$W_p = \frac{\pi \cdot 3,5^3}{16} = 8,42 \text{ см}^3,$$

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_{\kappa}}{W_p} = \frac{0,176 \cdot 10^2}{8,42} = 2,09 \text{ кН/см}^2 < [\tau] = 8 \text{ кН/см}^2,$$

$$\varphi' = \frac{M_{\kappa}}{GJ_p} = \frac{0,176 \cdot 10^2}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 14,7} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ рад/см} < [\varphi'] = 3,49 \cdot 10^{-4} \text{ рад/см}.$$

Условия прочности и жесткости стержня выполняются. Эпюры касательных напряжений на 1-м и 3-м участках стержня приведены на рис.8.9,а,б.

а) Участок 1



б) Участок 3

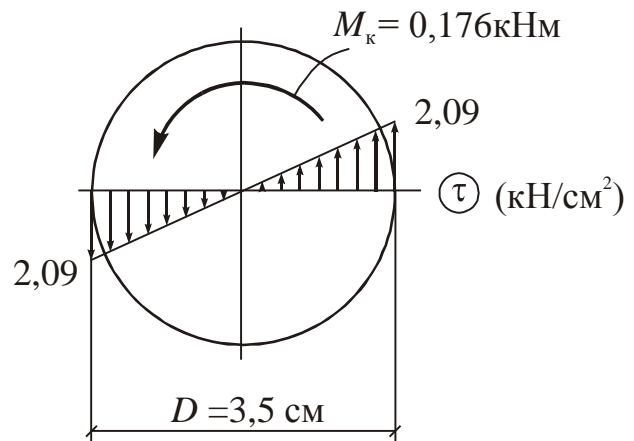


Рис.8.9

Определим углы поворота сечений стержня и проверим выполнение условия деформации  $\varphi_B = 0$ .

Сечение  $x = 0$ ,  $\varphi_0 = \varphi_A = 0$  (сечение закреплено).

Сечение  $x = 15\text{см}$ ,

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{M_{\kappa} l}{GJ_p} = 0 - \frac{0,124 \cdot 10^2 \cdot 15}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 4,49} = -5,18 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = -0^{\circ}18'.$$

Сечение  $x = 30\text{см}$ ,

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{M_{\kappa} l}{GJ_p} = -5,18 \cdot 10^{-3} - \frac{0,024 \cdot 10^2 \cdot 15}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 4,49} = -6,18 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = -0^{\circ}21'.$$

Сечение  $x = 70\text{см}$ ,

$$\varphi_3 = \varphi_B = \varphi_2 + \frac{M_{\kappa} l}{GJ_p} = -6,18 \cdot 10^{-3} + \frac{0,176 \cdot 10^2 \cdot 40}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 14,7} = (-6,18 + 5,99)10^{-3} \text{ рад} = -0,19 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \neq 0$$

Относительная погрешность, связанная с округлением требуемых диаметров стержня, равна:

$$\Delta\% = \frac{0,19}{5,99} 100\% = 3,17\%.$$

Эпюра углов закручивания стержня приведена на рис.8.8,з. Углы закручивания изменяются по линейному закону. Все поперечные сечения поворачиваются по ходу часовой стрелки.



## ГЛАВА 9

### СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

#### 9.1. Основные определения и формулы

Сложное сопротивление в стержне имеет место при действии на него произвольных нагрузок, которые можно разложить на осевые, поперечные и скручивающие составляющие.

В общем случае сложного сопротивления в поперечных сечениях стержня действуют нормальные напряжения  $\sigma_x$  и касательные напряжения  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{zx}$ , равнодействующими которых являются шесть внутренних усилий – продольная сила  $N$ , изгибающие моменты  $M_z$  и  $M_y$ , поперечные силы  $Q_z$  и  $Q_y$  и крутящий момент  $M_x = M_k$  (рис.9.1).

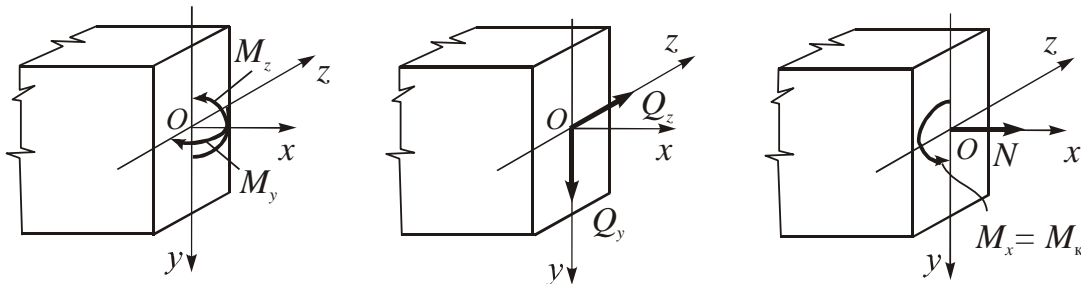


Рис.9.1

Нормальные напряжения в поперечном сечении при наличии всех трёх их равнодействующих  $N$ ,  $M_z$  и  $M_y$  определяются по формуле

$$\sigma_x = \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z. \quad (9.1)$$

Рассмотрим частные случаи сложного сопротивления.

**Плоский косой изгиб** имеет место, когда все поперечные нагрузки действуют в плоскости, не совпадающей с главными плоскостями инерции (рис.9.2,а).

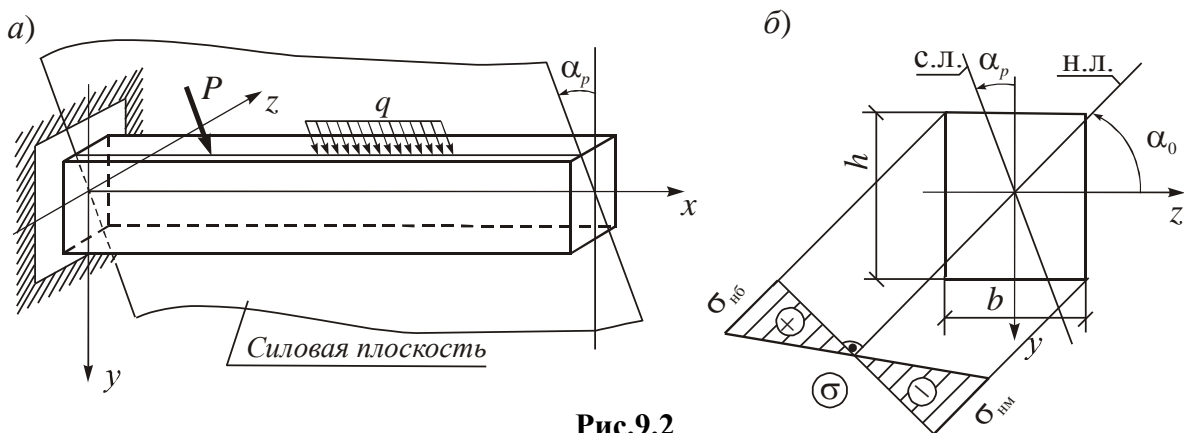


Рис.9.2

**Пространственный косой изгиб** имеет место при действии поперечных нагрузок в различных плоскостях (рис.9.3).

Нормальные напряжения в поперечном сечении определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z . \quad (9.2)$$

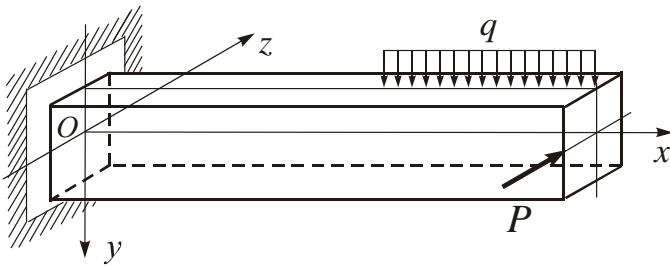


Рис.9.3

Изгибающие моменты  $M_z$  и  $M_y$  в случае плоского косо́го изгиба определяются по формулам

$$M_z = M \cos \alpha_p, \quad M_y = M \sin \alpha_p, \quad (9.3)$$

где  $M$  – суммарный изгибающий момент, действующий в силовой плоскости.

При пространственном косо́м изгибе  $M_z$  и  $M_y$  вычисляются отдельно от нагрузок в главных плоскостях и в общем случае изменяются по различным законам, а их отношение не является постоянной величиной.

Приравняв выражение (9.2) к нулю, получим уравнение нулевой линии

$$y = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_z} z . \quad (9.4)$$

Угол наклона нулевой линии  $\alpha_0$  при плоском косо́м изгибе связан с углом наклона силовой линии  $\alpha_p$  (рис.9.2,б) формулой

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_z} = -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha_p . \quad (9.5)$$

Условие прочности при косо́м изгибе для балок с поперечным сечением типа прямоугольника или двутавра записывается в виде

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq \gamma_c R . \quad (9.6)$$

В случае пространственного косо́го изгиба изгибающие моменты  $M_z$  и  $M_y$  могут иметь наибольшие значения в различных сечениях, поэтому условие прочности (9.6) необходимо проверять, по крайней мере, в сечениях, где один из моментов имеет наибольшее значение.

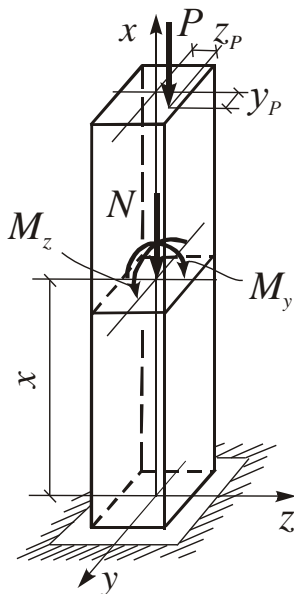


Рис.9.4

**Внецентренное растяжение и сжатие** имеет место в случае, когда нагрузки действуют вдоль прямой, параллельной оси стержня. При внецентренном сжатии (рис.9.4) внутренние усилия в поперечном сечении стержня равны

$$N = -P, \quad M_z = -P \cdot y_p, \quad M_y = -P \cdot z_p, \quad (9.7)$$

где  $y_p$ ,  $z_p$  – координаты точки приложения силы.

Напряжения определяются по формуле (9.1), которая с учётом (9.7) принимает вид

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p}{i_z^2} y + \frac{z_p}{i_y^2} z \right), \quad (9.8)$$

где величины

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} \quad (9.9)$$

называются главными радиусами инерции сечения.

Уравнение нулевой линии имеет вид

$$1 + \frac{y_P}{i_z^2} y + \frac{z_P}{i_y^2} z = 0. \quad (9.10)$$

Отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат, определяются по формулам

$$a_y = y_0 = -\frac{i_z^2}{y_P}, \quad a_z = z_0 = -\frac{i_y^2}{z_P}, \quad (9.11)$$

Если материал стержня неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, необходимо обеспечить выполнение двух условий прочности

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{нб}}^p &= -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_P}{i_z^2} y_A + \frac{z_P}{i_y^2} z_A \right) \leq \gamma_c R_p; \\ |\sigma_{\text{нб}}^c| &= \left| -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_P}{i_z^2} y_B + \frac{z_P}{i_y^2} z_B \right) \right| \leq \gamma_c R_c, \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

где  $R_p$  и  $R_c$  – расчётные сопротивления материала при растяжении и сжатии,  $z_A, y_A$  и  $z_B, y_B$  – координаты наиболее напряжённых точек сечения.

**Ядро сечения** – это выпуклая фигура, содержащая центр тяжести сечения и обладающая тем свойством, что при нахождении точки приложения силы внутри этой фигуры или на её границе во всех точках сечения напряжения имеют одинаковый знак. Координаты точек контура ядра сечения определяются с помощью формул (9.11).

**Растяжение и сжатие с изгибом** имеет место при одновременном действии на стержень продольных и поперечных нагрузок (рис.9.5). Нормальные напряжения в поперечных сечениях определяются по общей формуле (9.1). Приравняв это выражение к нулю, получим уравнение нулевой линии

$$\frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z = 0. \quad (9.13)$$

Положив в этом уравнении последовательно  $y = 0$  и  $z = 0$ , получим формулы для определения отрезков, отсекаемых нулевой линией на осях координат:

$$a_z = z_0 = -\frac{N}{M_y} \cdot \frac{J_y}{F}, \quad a_y = y_0 = -\frac{N}{M_z} \cdot \frac{J_z}{F}. \quad (9.14)$$

Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения

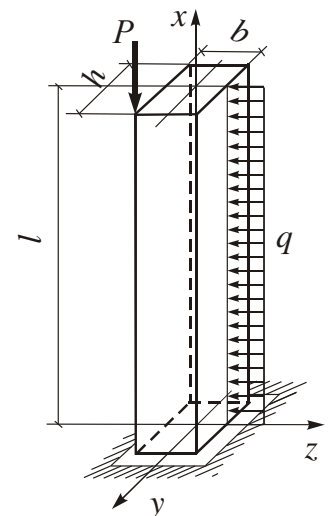


Рис.9.5

действуют в точках сечения, наиболее удалённых от нулевой линии. Значения этих напряжений для поперечных сечений типа прямоугольника и двутавра можно определить по формулам

$$\sigma_{\text{но}}^p = \frac{N}{F} + \left( \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} \right), \quad \sigma_{\text{но}}^c = \frac{N}{F} - \left( \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} \right). \quad (9.15)$$

**Изгиб с кручением** имеет место в случае, если стержень подвергается одновременному действию поперечных и скручивающих нагрузок.

Нормальные напряжения, вызываемые изгибом стержня, определяются по формуле (9.2), а касательные – по формуле Д.И. Журавского. Касательные напряжения, вызываемые кручением стержня, зависят от величины крутящего момента и для стержня круглого сечения определяются по формуле (8.4).

При изгибе с кручением расчет стержней на прочность необходимо производить с использованием теорий прочности. Рассмотрим наиболее часто используемые при практических расчётах теории прочности и запишем соответствующие этим теориям условия прочности для стержней.

- *Теория наибольших касательных напряжений:*

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \gamma_c R. \quad (9.16)$$

- *Энергетическая теория прочности:*

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \gamma_c R. \quad (9.17)$$

Теория наибольших касательных напряжений и энергетическая теория хорошо подтверждаются экспериментально для пластичных материалов.

## 9.2. Примеры решения задач

### Задача 9.1.

Для внецентренно сжатого короткого стержня (рис.9.6,а) определим наибольшую величину расчетной сжимающей силы  $P$  из условий прочности при растяжении и сжатии. Построим эпюру нормальных напряжений от действия силы  $P$  и ядро сечения. В расчетах примем расчетные сопротивления материала при растяжении и сжатии  $R_p = 1 \text{ МПа} = 0,1 \text{ кН/см}^2$ ,  $R_c = 5 \text{ МПа} = 0,5 \text{ кН/см}^2$ , коэффициент условий работы  $\gamma_c = 1$ .

Определим необходимые геометрические характеристики поперечного сечения стержня (рис.9.6,б). Для этого разбиваем сечение на прямоугольник, два прямоугольных треугольника и полукруг.

Площадь сечения и статический момент относительно оси  $O_{1z_1}$  равны:

$$F = 30 \cdot 15 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 15 + \frac{\pi \cdot 30^2}{2} = 2089 \text{ см}^2;$$

$$S_{z_1} = -30 \cdot 15 \cdot \frac{15}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 15 \cdot \frac{15}{3} + \frac{\pi \cdot 30^2}{2} \cdot \frac{4 \cdot 30}{3\pi} = 13500 \text{ см}^3.$$

Координата центра тяжести сечения равна:

$$y_0 = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{13500}{2089} = 6,5 \text{ см.}$$

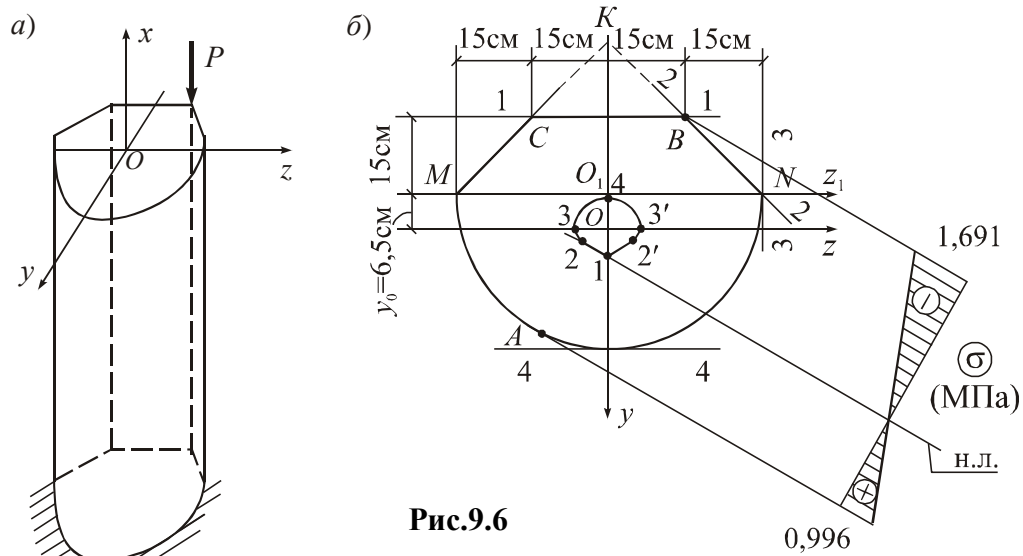


Рис.9.6

Определим момент инерции сечения относительно вспомогательной оси  $O_1z_1$ . Используя справочные данные о моментах инерции этих фигур относительно оси  $O_1z_1$ , проходящей через их основания, получим

$$J_{z_1} = \frac{30 \cdot 15^3}{3} + 2 \cdot \frac{15 \cdot 15^3}{12} + \frac{\pi \cdot 30^4}{8} = 360273 \text{ см}^4.$$

Момент инерции сечения относительно главной центральной оси  $Oz$  определяем с помощью зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей

$$J_z = J_{z_1} - Fy_0^2 = 360273 - 2089 \cdot 6,5^2 = 272012 \text{ см}^4.$$

Момент инерции сечения относительно оси  $Oy$  определяем как момент инерции полуокруга и разность моментов инерции двух равнобедренных треугольников  $MKN$  и  $CKB$ .

$$J_y = \frac{\pi \cdot 30^4}{8} + \frac{30 \cdot 60^3}{48} - \frac{15 \cdot 30^3}{48} = 444648 \text{ см}^4.$$

По формулам (9.9) определяем квадраты радиусов инерции сечения относительно главных осей.

$$i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{272012}{2089} = 130,2 \text{ см}^2, \quad i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{444648}{2089} = 212,8 \text{ см}^2.$$

Координаты точки приложения силы равны:  $y_p = -(15 + 6,5) = -21,5 \text{ см}$ ,  $z_p = 15 \text{ см}$ . Определяем по формулам (9.11) отрезки, отсекаемые нулевой линией на главных осях.

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{130,2}{-21,5} = 6,06 \text{ см}, \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_p} = -\frac{212,8}{15} = -14,2 \text{ см}.$$

Откладываем эти отрезки на осях и проводим нулевую линию, которая делит сечение на зоны растяжения и сжатия. Проводя параллельно нулевой линии две касательные к контуру сечения, находим точки  $A$  и  $B$ , в которых действуют наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения. Координаты точки  $A$  определены графически.

$$y_A = 20,9 \text{ см}, \quad z_A = -12,1 \text{ см}, \quad y_B = -21,5 \text{ см}, \quad z_B = 15 \text{ см}.$$

Из условий прочности (9.12) при растяжении и сжатии находим два значения расчетной сжимающей силы  $P$ .

$$\sigma_A = -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_P}{i_z^2} y_A + \frac{z_P}{i_y^2} z_A \right) = -\frac{P}{F} \left[ 1 + \frac{-21,5}{130,2} \cdot 20,9 + \frac{15}{212,8} \cdot (-12,1) \right] = 3,304 \frac{P}{F} \leq \gamma_c R_p,$$

$$P \leq \frac{F}{3,304} \gamma_c R_p = \frac{2089 \cdot 1 \cdot 0,1}{3,304} = 63,2 \text{ кН};$$

$$|\sigma_B| = \left| -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_P}{i_z^2} y_B + \frac{z_P}{i_y^2} z_B \right) \right| = \frac{P}{F} \left[ 1 + \frac{-21,5}{130,2} \cdot (-21,5) + \frac{15}{212,8} \cdot 15 \right] = 5,608 \frac{P}{F} \leq \gamma_c R_c,$$

$$P \leq \frac{F}{5,608} \gamma_c R_c = \frac{2089 \cdot 1 \cdot 0,5}{5,608} = 186,2 \text{ кН}.$$

Примем с округлением меньшую силу  $P = 63 \text{ кН}$ . При этом наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в точках  $A$  и  $B$  равны:

$$\sigma_A = 3,304 \cdot \frac{63}{2089} = 0,0996 \text{ кН/см}^2 = 0,996 \text{ МПа} < \gamma_c R_p = 1 \text{ МПа};$$

$$|\sigma_B| = 5,608 \cdot \frac{63}{2089} = 0,1691 \text{ кН/см}^2 = 1,691 \text{ МПа} < \gamma_c R_c = 5 \text{ МПа}.$$

Прочность стержня обеспечена. Эпюра нормальных напряжений приведена на рис.9.6,б.

Для построения ядра сечения проведем четыре нулевые линии, касательные к контуру сечения, и определим соответствующие им координаты точек контура ядра по формулам

$$y_P = -\frac{i_z^2}{y_0}, \quad z_P = -\frac{i_y^2}{z_0},$$

где  $y_0, z_0$  – отрезки, отсекаемые нулевыми линиями на осях координат.

Касательная 1 – 1:

$$y_0 = -21,5 \text{ см}, \quad z_0 = \infty, \quad y_P = -\frac{130,2}{-21,5} = 6,06 \text{ см}, \quad z_P = 0.$$

Касательная 2 – 2:

$$y_0 = -(30 + 6,5) = -36,5 \text{ см}, \quad z_0 = 36,5 \text{ см},$$

$$y_P = -\frac{130,2}{-36,5} = 3,57 \text{ см}, \quad z_P = -\frac{212,8}{36,5} = -5,83 \text{ см}.$$

Касательная 3 – 3:

$$y_0 = \infty, \quad z_0 = 30 \text{ см}, \quad y_P = 0, \quad z_P = -\frac{212,8}{30} = -7,09 \text{ см}.$$

Касательная 4 – 4:

$$y_0 = 30 - 6,5 = 23,5 \text{ см}, \quad z_0 = \infty, \quad y_P = -\frac{130,2}{23,5} = -5,54 \text{ см}, \quad z_P = 0.$$

Поскольку переход касательных из положения 1 – 1 в положение 2 – 2 и далее в положение 3 – 3 осуществляется путем поворота вокруг угловых точек  $B$  и  $N$ , линии контура ядра сечения между соответствующими точками 1, 2, 3 являются прямыми. При переходе из положения 3 – 3 в положение 4 – 4 касательная огибает дугу окружности, поэтому между точками 3 и 4 контур ядра сечения является криволинейным. Точки 2' и 3' расположены симметрично по отношению к точкам 2 и 3.

### Задача 9.2

Для консольной деревянной балки прямоугольного сечения, находящейся в условиях плоского косоуго изгиба (рис.9.7,а), определим размеры сечения и построим эпюру нормальных напряжений в опасном сечении. В расчетах примем соотношение сторон прямоугольника  $k = h/b = 1,4$ , расчетное сопротивление дерева  $R = 13 \text{ МПа} = 1,3 \text{ кН/см}^2$ , коэффициент условий работы  $\gamma_c = 1$ . Значения нагрузок являются расчётными. Угол наклона силовой плоскости к главной оси  $Oy$  поперечного сечения  $\alpha_P = 30^\circ$ .

Строим эпюру суммарного изгибающего момента  $M$  (рис.9.7,а).

Составляющие суммарного изгибающего момента равны

$$M_z = M \cos \alpha_P = -4 \cos 30^\circ = -3,46 \text{ кНм},$$

$$M_y = M \sin \alpha_P = -4 \sin 30^\circ = -2 \text{ кНм}.$$

Момент  $M_z$  вызывает растяжение в точках верхней части сечения, а  $M_y$  – в точках левой части (при взгляде на сечение со стороны положительного направления оси  $Ox$ ). Наибольшие по абсолютной величине напряжения  $\sigma_{\text{нб}}$  возникают в угловых точках  $A$  и  $B$  сечения.

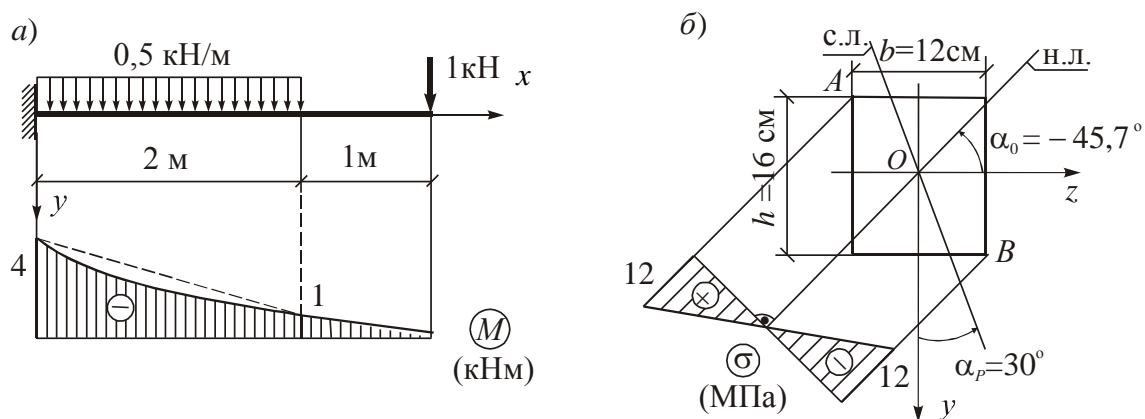


Рис.9.7

Учитывая, что для прямоугольного сечения отношение моментов сопротивления равно

$$\frac{W_z}{W_y} = \frac{bh^2/6}{hb^2/6} = \frac{h}{b} = k, \quad W_y = \frac{W_z}{k},$$

из условия прочности (9.6) при косом изгибе

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq \gamma_c R$$

получим формулу подбора сечения:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{6k} \geq \frac{M_z + kM_y}{\gamma_c R}.$$

Определяем величину  $h$

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{6k(M_z + kM_y)}{\gamma_c R}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1,4(3,46 + 1,4 \cdot 2) \cdot 10^2}{1 \cdot 1,3}} = 15,93 \text{ см};$$

$$b = \frac{h}{k} = \frac{15,93}{1,4} = 11,38 \text{ см}.$$

Принимаем сечение  $b \times h = 12 \times 16 \text{ см}$  и определяем моменты инерции и моменты сопротивления сечения.

$$J_z = \frac{12 \cdot 16^3}{12} = 4096 \text{ см}^4, \quad W_z = \frac{12 \cdot 16^2}{6} = 512 \text{ см}^3;$$

$$J_y = \frac{16 \cdot 12^3}{12} = 2304 \text{ см}^4, \quad W_y = \frac{16 \cdot 12^2}{6} = 384 \text{ см}^3.$$

Определяем наибольшие по абсолютной величине напряжения в угловых точках  $A$  и  $B$  опасного сечения и проверяем прочность балки.

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{3,46 \cdot 10^2}{512} + \frac{2 \cdot 10^2}{384} = 1,20 \text{ кН/см}^2 = 12 \text{ МПа} < \gamma_c R = 13 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется. Определяем угол наклона нулевой линии к главной оси  $Oz$ .

$$\text{tg} \alpha_0 = -\frac{J_z}{J_y} \text{tg} \alpha_p = -\frac{4096}{2304} \text{tg} 30^\circ = -1,026, \quad \alpha_0 = -45,7^\circ.$$

Нулевая линия проходит через вторую и четвертую четверти осей координат сечения. Эпюра нормальных напряжений приведена на рис.9.7,б.

### Задача 9.3

Для шарнирно опертой двутавровой балки, находящейся в условиях пространственного изгиба (рис.9.8,а), подберем сечение из условия прочности по методу предельных состояний при заданных расчетных значениях нагрузок. Построим эпюру нормальных напряжений в опасном сечении балки. В расчетах примем расчетное сопротивление стали  $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$ , коэффициент условий работы  $\gamma_c = 0,9$ .



Определяем вертикальные и горизонтальные опорные реакции и строим эпюры изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_y$  (рис.9.8,а). Момент  $M_z$  вызывает растяжение в точках нижней части сечения, а момент  $M_y$  – в точках правой части сечения (при взгляде на сечение со стороны положительного направления оси  $Ox$ ).

Приняв в первом приближении отношение моментов сопротивления сечения двутавра равным  $k = W_z/W_y = 10$ , определим требуемый момент сопротивления  $W_z$  из условий прочности в двух опасных сечениях балки  $C$  и  $D$ .

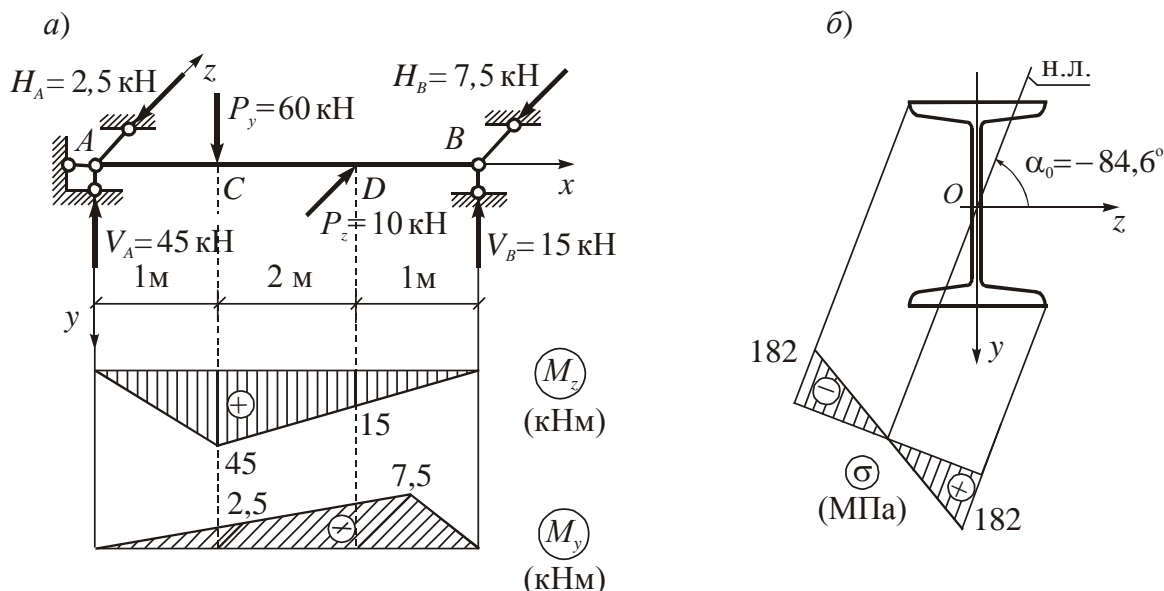


Рис.9.8

Сечение  $C$ :

$$W_z \geq \frac{M_z + kM_y}{\gamma_c R} = \frac{(45 + 10 \cdot 2,5) \cdot 10^2}{0,9 \cdot 21} = 370 \text{ см}^3.$$

Сечение  $D$ :

$$W_z = \frac{(15 + 10 \cdot 7,5) \cdot 10^2}{0,9 \cdot 21} = 476,2 \text{ см}^3.$$

Более опасным является сечение  $D$ . По сортаменту принимаем  $\text{I}33$ ,

$$W_z = 597 \text{ см}^3, \quad W_y = 59,9 \text{ см}^3.$$

Определяем наибольшие напряжения в угловых точках сечения  $D$  и проверяем прочность балки.

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{15 \cdot 10^2}{597} + \frac{7,5 \cdot 10^2}{59,9} = 15 \text{ кН/см}^2 = 150 \text{ МПа} < \gamma_c R = 189 \text{ МПа}.$$

Прочность балки обеспечена с достаточно большим запасом, поэтому во втором приближении примем сечение  $\text{I}30$ ,

$$W_z = 472 \text{ см}^3, \quad W_y = 49,9 \text{ см}^3, \quad J_z = 7080 \text{ см}^4, \quad J_y = 337 \text{ см}^4$$

и проверим прочность балки

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{15 \cdot 10^2}{472} + \frac{7,5 \cdot 10^2}{49,9} = 18,2 \text{ кН/см}^2 = 182 \text{ МПа} < \gamma_c R = 189 \text{ МПа}.$$

Прочность балки обеспечена.

Определим угол наклона  $\alpha_0$  нулевой линии в сечении  $D$ .

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_z} = -\frac{7080}{337} \cdot \frac{7,5}{15} = -10,5, \quad \alpha_0 = -84,6^\circ.$$

Так как  $\alpha_0 < 0$ , то нулевая линия проходит через вторую и четвертую четверти осей координат сечения. Эпюра нормальных напряжений приведена на рис.9.8,б.

#### Задача 9.4

Стальной консольный составной стержень испытывает внецентренное растяжение и изгиб (рис.9.9,а). Построим эпюру нормальных напряжений в опасном сечении и проверим прочность стержня. В расчетах примем  $R = 210$  МПа,  $\gamma_c = 1$ . Заданные нагрузки являются расчетными. Размеры на рис.9.9,б даны в сантиметрах.

Изгибающие моменты от внецентренно приложенной силы  $P_1$  постоянны по длине стержня и равны

$$M_z = P_{y_P} = 500 \cdot 0,15 = 75 \text{ кНм}, \quad M_y = P_{z_P} = 500 \cdot 0,12 = 60 \text{ кНм},$$

где  $y_P$  и  $z_P$  – координаты точки приложения силы  $P_1$  (точка  $K$ ).

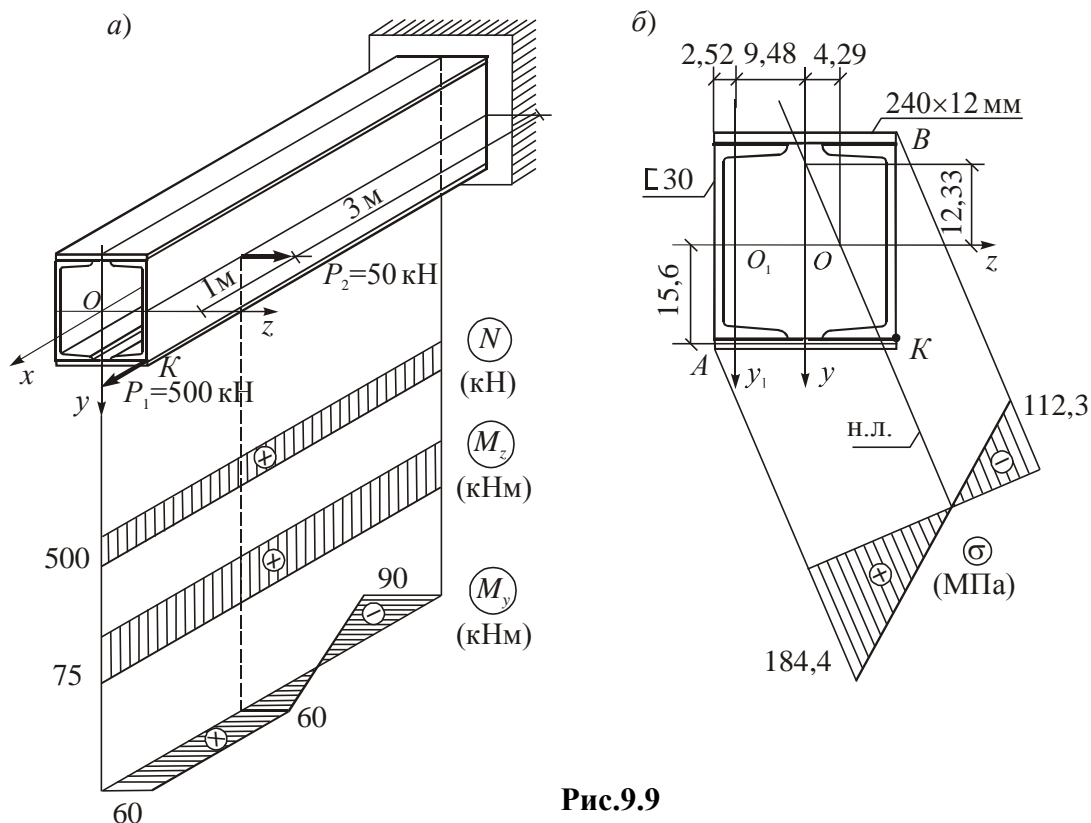


Рис.9.9

Сила  $P_2$  вызывает изгиб стержня в горизонтальной плоскости, при этом изгибающий момент в заделке равен  $M_y = -50 \cdot 3 = -150$  кНм. Эпюры продольных сил и изгибающих моментов, вызванные совместным действием сил  $P_1$  и  $P_2$ , приведены на рис.9.9,а.

Опасным сечением является сечение, совпадающее с заделкой, где оба изгибающих момента имеют наибольшие значения  $M_z = 75 \text{ кНм}$ ,  $M_y = -90 \text{ кНм}$ .

Определим геометрические характеристики сечения. Учитывая, что для швеллера [30  $F_1 = 40,5 \text{ см}^2$ ,  $J_{z_1} = 5810 \text{ см}^4$ ,  $J_{y_1} = 327 \text{ см}^4$ ,  $h = 30 \text{ см}$ ,  $z_0 = 2,52 \text{ см}$ ,

найдем  $F = 2(40,5 + 24 \cdot 1,2) = 138,6 \text{ см}^2$ ;

$$J_z = 2 \left( 5810 + \frac{24 \cdot 1,2^3}{12} + 24 \cdot 1,2 \cdot 15,6^2 \right) = 25644 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 2 \left( 327 + 40,5 \cdot 9,48^2 + \frac{1,2 \cdot 24^3}{12} \right) = 10698 \text{ см}^4;$$

$$W_z = \frac{25644}{16,2} = 1583 \text{ см}^3, \quad W_y = \frac{10698}{12} = 891,5 \text{ см}^3.$$

Определим по формулам (9.14) отрезки, отсекаемые нулевой линией на главных осях  $Oy$  и  $Oz$ :

$$y_0 = -\frac{NJ_z}{M_z F} = -\frac{500 \cdot 25644}{75 \cdot 10^2 \cdot 138,6} = -12,33 \text{ см};$$

$$z_0 = -\frac{NJ_y}{M_y F} = -\frac{500 \cdot 10698}{-90 \cdot 10^2 \cdot 138,6} = 4,29 \text{ см}.$$

Отложив  $y_0$  и  $z_0$  на осях координат, проводим нулевую линию. Наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения возникают соответственно в точках  $A$  и  $B$ , наиболее удаленных от нулевой линии:

$$\sigma_A = \frac{N}{F} + \left( \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} \right) = \frac{500}{138,6} + \left( \frac{75 \cdot 10^2}{1583} + \frac{90 \cdot 10^2}{891,5} \right) =$$

$$= 18,44 \text{ кН/см}^2 = 184,4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = \frac{N}{F} - \left( \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} \right) = \frac{500}{138,6} - \left( \frac{75 \cdot 10^2}{1583} + \frac{90 \cdot 10^2}{891,5} \right) =$$

$$= -11,23 \text{ кН/см}^2 = -112,3 \text{ МПа}.$$

Поскольку  $\sigma_{\text{нб}} = \sigma_A = 184,4 \text{ МПа} < \gamma_c R = 210 \text{ МПа}$ , прочность стержня обеспечена.

Эпюра  $\sigma$  в опасном сечении приведена на рис.9.9,б.

### Задача 9.5

Стальной консольный составной стержень испытывает внецентренное растяжение и изгиб в вертикальной плоскости  $Oxy$  (рис.9.10,а). Построим эпюру

нормальных напряжений в опасном сечении стержня и проверим прочность. В расчетах примем  $R = 210$  МПа,  $\gamma_c = 1$ . Нагрузки являются расчетными.

Изгибающий момент на свободном конце стержня равен  $M_z = P y_p = 600 \cdot 0,06 = 36$  кНм. В заделке  $M_z = 36 - 18 \cdot 3 \cdot 1,5 = -45$  кНм. Эпюры изгибающих моментов и продольных сил приведены на рис.9.10,а. Опасным является сечение стержня в заделке.

Определим геометрические характеристики сечения. Учитывая, что для двутавра  $\text{I}24$   $F_1 = 34,8$  см<sup>2</sup>,  $J_{z_1} = 3460$  см<sup>4</sup>, получим:

$$F = 34,8 + 2 \cdot 14 \cdot 0,8 = 57,2 \text{ см}^2;$$

$$J_z = 3460 + 2 \left( \frac{14 \cdot 0,8^3}{12} + 14 \cdot 0,8 \cdot 12,4^2 \right) = 6905 \text{ см}^4;$$

$$W_z = \frac{J_z}{h/2} = \frac{6905}{12,8} = 540 \text{ см}^3.$$

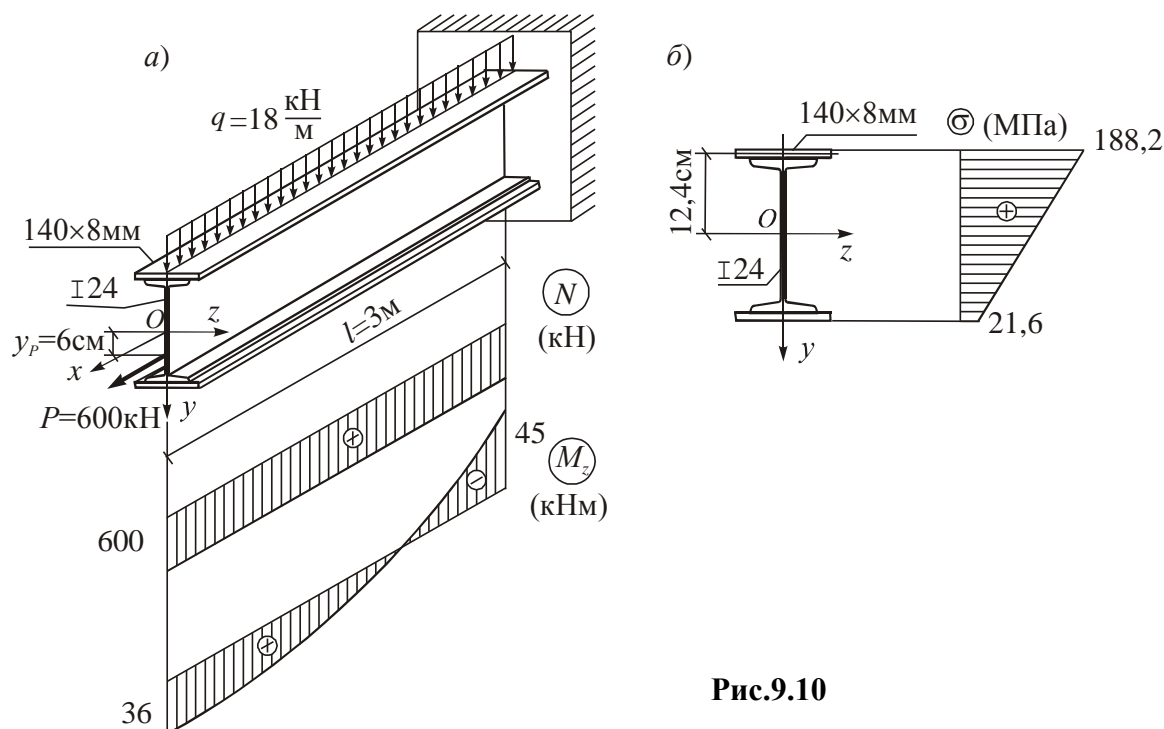


Рис.9.10

Определим напряжения в нижних и верхних волокнах стержня.

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{N}{F} - \frac{|M_z|}{W_z} = \frac{600}{57,2} - \frac{45 \cdot 10^2}{540} = 2,16 \text{ кН/см}^2 = 21,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{в}} = \frac{N}{F} + \frac{|M_z|}{W_z} = \frac{600}{57,2} + \frac{45 \cdot 10^2}{540} = 18,82 \text{ кН/см}^2 = 188,2 \text{ МПа}.$$

Поскольку  $\sigma_{\text{нб}} = 188,2$  МПа  $< \gamma_c R = 1 \cdot 210 = 210$  МПа, прочность стержня обеспечена. Эпюра  $\sigma$  в опасном сечении приведена на рис.9.10,б.

### Задача 9.6

Стальной ломаный стержень круглого сечения нагружен вертикальной силой  $P_1 = 4 \text{ кН}$  и горизонтальной силой  $P_2 = 6 \text{ кН}$  (рис.9.11,а). Допускаемое напряжение стали  $[\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ кН/см}^2$ . Определим диаметр  $D$  стержня из условий прочности по теории наибольших касательных напряжений и по энергетической теории.

Участок  $CD$  стержня испытывает изгиб в вертикальной плоскости, а участок  $OC$  – изгиб в вертикальной и горизонтальной плоскостях и кручение. Эпюры изгибающих моментов  $M_y$ ,  $M_z$  и крутящего момента  $M_k$  показаны на рис.9.11,а.

Опасным является сечение стержня в заделке, где изгибающий момент  $M_y$  и крутящий момент  $M_k$  имеют наибольшие значения.

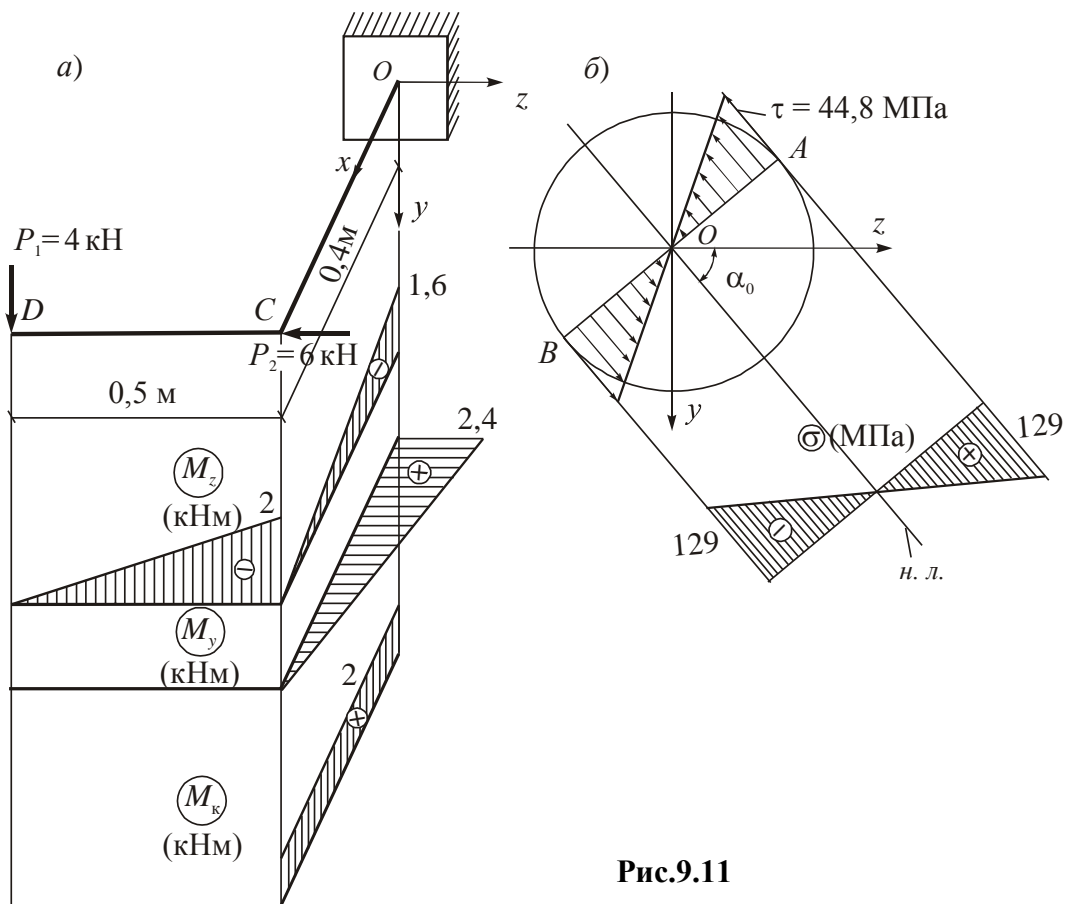


Рис.9.11

Вычислим величину суммарного изгибающего момента в заделке:

$$M_{\text{и}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{1,6^2 + 2,4^2} = 2,88 \text{ кНм} = 288 \text{ кНсм.}$$

Опасными являются точки  $A$  и  $B$  контура поперечного сечения в заделке (рис.9.11,б), в которых возникают наибольшие по абсолютной величине нормальные и касательные напряжения от изгиба и кручения

$$\sigma = \frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{и}}}, \quad \tau = \frac{M_k}{W_p},$$

где  $W_{\text{и}}$  и  $W_p$  – моменты сопротивления сечения при изгибе и кручении

$$W_{\text{и}} = \frac{\pi D^3}{32}, \quad W_p = 2W_{\text{и}} = \frac{\pi D^3}{16}.$$

В сечениях стержня возникают также касательные напряжения от поперечного изгиба, которые могут быть определены по формуле Д.И. Журавского. Однако, для стержней сплошного круглого сечения эти напряжения малы и могут при оценке прочности не учитываться.

При изгибе с кручением условия прочности по теории наибольших касательных напряжений (9.16) и энергетической теории (9.17) имеют следующий вид:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{1}{W_{\text{и}}} \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2} \leq [\sigma];$$

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{1}{W_{\text{и}}} \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2} \leq [\sigma].$$

Используя формулу для  $W_{\text{и}}$ , определим требуемый диаметр стержня. По теории наибольших касательных напряжений

$$W_{\text{и}} = \frac{\pi D^3}{32} \geq \frac{\sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2}}{[\sigma]} = \frac{\sqrt{288^2 + 200^2}}{16} = 21,91 \text{ см}^3;$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 21,91}{3,14}} = 6,07 \text{ см}.$$

По энергетической теории

$$W_{\text{и}} = \frac{\pi D^3}{32} \geq \frac{\sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2}}{[\sigma]} = \frac{\sqrt{288^2 + 0,75 \cdot 200^2}}{16} = 21,00 \text{ см}^3;$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 21}{3,14}} = 5,98 \text{ см}.$$

Таким образом, по обеим теориям прочности получили близкие результаты. Примем  $D = 6,1 \text{ см}$  и определим наибольшие значения нормальных и касательных напряжений для сечения, совпадающего с заделкой.

$$W_{\text{и}} = \frac{3,14 \cdot 6,1^3}{32} = 22,3 \text{ см}^3, \quad W_p = 2 \cdot 22,3 = 44,6 \text{ см}^3;$$

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{288}{22,3} = 12,9 \text{ кН/см}^2 = 129 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{200}{44,6} = 4,48 \text{ кН/см}^2 = 44,8 \text{ МПа}.$$

Определим угол наклона нулевой линии к оси  $Oz$  в опасном сечении:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_z} = -\frac{2,4}{-1,6} = 1,5, \quad \alpha_0 = 56,3^\circ.$$

Проводим нулевую линию и строим эпюры  $\sigma$  и  $\tau$  в опасном сечении (рис.9.11,б).

## ГЛАВА 10

# УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ

## 10.1. Основные определения и формулы

При изучении равновесия идеально прямого гибкого стержня из упругого материала, находящегося под действием центрально приложенной к верхнему сечению сжимающей силы  $P$  (рис.10.1) возможны следующие три случая.

1. Сжимающая продольная сила  $P$  относительно невелика. Если стержень с помощью какой-либо поперечной нагрузки слегка отклонить, а затем эту нагрузку снять, то стержень вновь примет первоначальную прямолинейную форму равновесия (рис. 10.1,а). В этом случае ( $P < P_{кр}$ ) прямолинейная форма равновесия стержня является устойчивой.

2. При достижении силой  $P$  критического значения  $P = P_{кр}$  теоретически возможны как прямолинейная, так и искривлённая формы равновесия (рис.10.1,б). Однако, прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой.

3. При дальнейшем даже незначительном увеличении сжимающей силы ( $P > P_{кр}$ ) происходит резкое нарастание прогибов и возникают значительные дополнительные деформации и напряжения изгиба. Такое явление называется потерей устойчивости (рис.10.1,в).

Критическая сила Эйлера  $P_{кр}$  при различных случаях закрепления концов стержня определяется по формуле

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \quad (10.1)$$

где величина  $l_0 = \mu l$  называется приведенной длиной стержня, а  $\mu$  – коэффициентом приведения длины, который зависит от вида опорных закреплений стержня.

Выражения для критических сил и значения коэффициента приведения длины в основных случаях опорных закреплений приведены на рис.10.2. В зависимости от условий закрепления стержня потеря устойчивости может происходить в одной из двух главных плоскостей инерции  $Oxy$  или  $Oxz$ .

Критические силы, соответствующие потере устойчивости стержня в главных плоскостях, определяются по формулам

$$P_{кр}^{(y)} = \frac{\pi^2 EJ_z}{(\mu_y l)^2}, \quad P_{кр}^{(z)} = \frac{\pi^2 EJ_y}{(\mu_z l)^2}. \quad (10.2)$$

Критические напряжения определяются по формуле

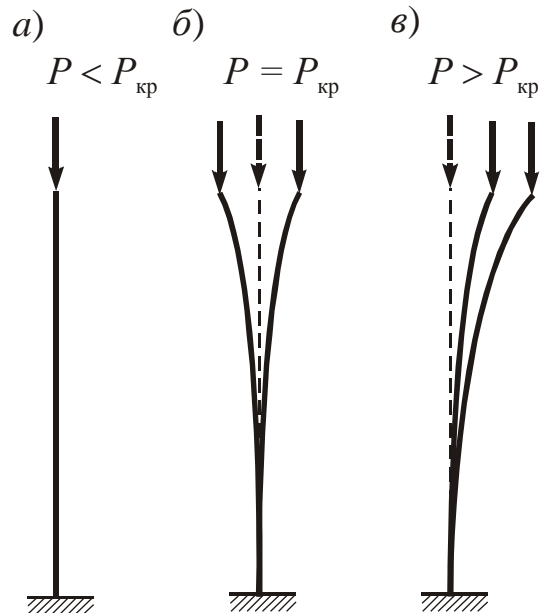


Рис.10.1

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (10.3)$$

где  $\lambda = l_0/i$  – гибкость стержня,  $i$  – радиус инерции поперечного сечения.

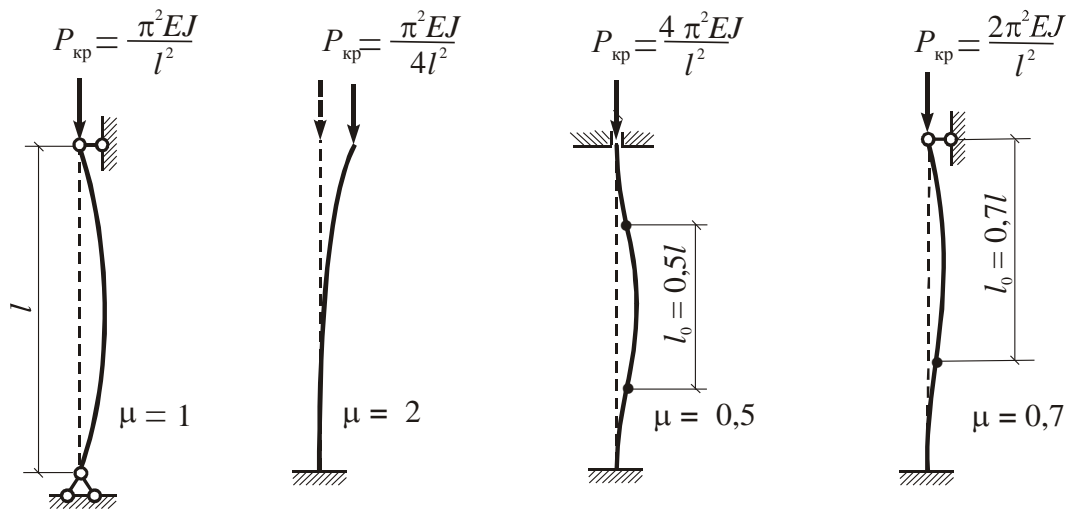


Рис.10.2

Формулы Эйлера для критической силы и критических напряжений для стержней из малоуглеродистой стали с пределом пропорциональности

$$\sigma_{пц} = 200 \div 220 \text{ МПа}$$

можно использовать в пределах упругости при гибкости  $\lambda \geq 100$ .

При работе стержня за пределом упругости и значениях гибкости  $60 \leq \lambda < 100$  можно использовать эмпирическую формулу Тетмайера–Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (10.4)$$

где для указанной стали  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа, или квадратичную зависимость

$$\sigma_{кр} = \sigma_T - (\sigma_T - \sigma_{пц}) \left( \frac{\lambda}{100} \right)^2, \quad (10.5)$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести,  $\sigma_{пц}$  – предел пропорциональности стали.

При гибкости  $\lambda < 60$  можно принять  $\sigma_{кр} = \sigma_T$ .

Условие устойчивости записывается в виде

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi \gamma_c R, \quad (10.6)$$

где  $\varphi$  – коэффициент продольного изгиба ( $0 < \varphi < 1$ ), величина которого определяется в зависимости от материала и гибкости  $\lambda$  стержня. Значения коэффициента  $\varphi$  для некоторых материалов приведены в табл.10.1.

Коэффициент запаса устойчивости стержня можно определить как отношение критической силы  $P_{кр}$  к заданному нормативному значению  $P_n$  продольной сжимающей силы

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P_n}. \quad (10.7)$$



Таблица 10.1

Гиб- кость $\lambda$	Сталь с расчетным сопротивлением по пределу текучести $R$ , МПа							Чугун марки СЧ	Дерево (сосна)
	200	240	280	320	360	400	440		
0	1	1	1	L	1	1	1	1	1
10	0,988	0,987	0,985	0,984	0,983	0,982	0,981	0,970	0,992
20	0,967	0,962	0,959	0,955	0,952	0,949	0,946	0,910	0,968
30	0,939	0,931	0,924	0,917	0,911	0,905	0,900	0,810	0,928
40	0,906	0,894	0,883	0,873	0,863	0,854	0,846	0,690	0,872
50	0,869	0,852	0,836	0,822	0,809	0,796	0,785	0,570	0,800
60	0,827	0,805	0,785	0,766	0,749	0,721	0,696	0,440	0,712
70	0,782	0,754	0,724	0,687	0,654	0,623	0,595	0,340	0,612
80	0,734	0,686	0,641	0,602	0,566	0,532	0,501	0,260	0,469
90	0,665	0,612	0,565	0,522	0,483	0,447	0,413	0,200	0,370
100	0,599	0,542	0,493	0,448	0,408	0,369	0,335	0,160	0,300
110	0,537	0,478	0,427	0,381	0,338	0,306	0,280	—	0,248
120	0,479	0,419	0,366	0,321	0,287	0,260	0,237	—	0,208
130	0,425	0,364	0,313	0,276	0,247	0,223	0,204	—	0,178
140	0,376	0,315	0,272	0,240	0,215	0,195	0,178	—	0,153
150	0,328	0,276	0,239	0,211	0,189	0,171	0,157	—	0,133
160	0,290	0,244	0,212	0,187	0,167	0,152	0,139	—	0,117
170	0,259	0,218	0,189	0,167	0,150	0,136	0,125	—	0,104
180	0,233	0,196	0,170	0,150	0,135	0,123	0,112	—	0,093
190	0,210	0,177	0,154	0,136	0,122	0,111	0,102	—	0,083
200	0,191	0,161	0,140	0,124	0,111	0,101	0,093	—	0,075
210	0,174	0,147	0,128	0,113	0,102	0,093	0,085	—	0,068
220	0,160	0,135	0,118	0,104	0,094	0,086	0,077	—	0,062

Продольно-поперечным называется изгиб достаточно гибкого стержня, возникающий от совместного действия поперечной и продольной нагрузок (рис.10.3).

Уравнение изогнутой оси в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + k^2 v = -\frac{M_{\text{п}}}{EJ}, \quad (10.8)$$

где  $k^2 = P/EJ$ ,  $M_{\text{п}}$  – изгибающий момент от действия поперечной

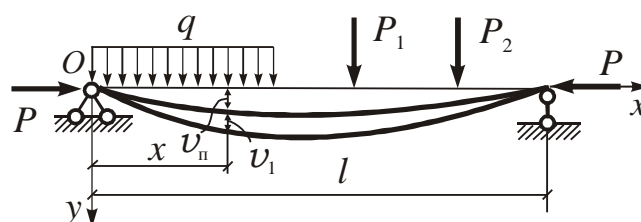


Рис.10.3

нагрузки,  $v = v_{\text{п}} + v_1$  – суммарный прогиб стержня,  $v_{\text{п}}$  – прогиб от поперечной нагрузки,  $v_1$  – дополнительный прогиб от действия сжимающей силы  $P$ .

Точное решение уравнения (10.8) можно записать в форме метода начальных параметров. Приближённое решение уравнения (10.8) можно представить в виде

$$v = \frac{v_{\text{п}}}{1 - \frac{P}{P_{\text{э}}}}, \quad (10.9)$$

где  $P_{\text{э}}$  – критическая сила в плоскости изгиба, вычисляемая по формуле Эйлера независимо от величины гибкости стержня.

Суммарный изгибающий момент от совместного действия продольной силы  $P$  и поперечной нагрузки определяется по формуле

$$M = M_{\text{п}} + Pv. \quad (10.10)$$

Проверка прочности стержня при продольно-поперечном изгибе может быть сведена к требованию, чтобы наибольшие сжимающие напряжения в опасном сечении от действия нормативных нагрузок, умноженных на заданную величину коэффициента запаса по нагрузкам  $n_p$ , не превышали опасного напряжения, равного для пластичного материала пределу текучести  $\sigma_{\text{т}}$ .

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} \leq \sigma_{\text{т}}. \quad (10.11)$$

## 10.2. Примеры решения задач

### Задача 10.1.

Центрально сжатый стержень, составленный из двух жестко соединенных между собой швеллеров, имеет различные опорные закрепления в двух главных плоскостях  $Oxy$  и  $Oxz$  (рис.10.4). Материал стержня – малоуглеродистая сталь с расчетным сопротивлением  $R = 200$  МПа, пределом текучести  $\sigma_{\text{т}} = 230$  МПа и пределом пропорциональности  $\sigma_{\text{пп}} = 200$  МПа. Нормативное значение сжимающей силы  $P_{\text{н}} = 550$  кН, коэффициент надежности по нагрузке  $\gamma_f = 1,2$ , коэффициент условий работы  $\gamma_c = 1$ .

Расчетное значение сжимающей силы равно:

$$P = P_{\text{н}} \gamma_f = 550 \cdot 1,2 = 660 \text{ кН}.$$

Подберем сечение стержня из условия устойчивости в двух главных плоскостях.

Приняв в первом приближении коэффициент продольного изгиба равным  $\varphi = 0,5$ , определим с помощью формулы (10.6) необходимую площадь сечения стержня

$$F \geq \frac{P}{\varphi \gamma_c R} = \frac{660}{0,5 \cdot 1 \cdot 20} = 66 \text{ см}^2.$$

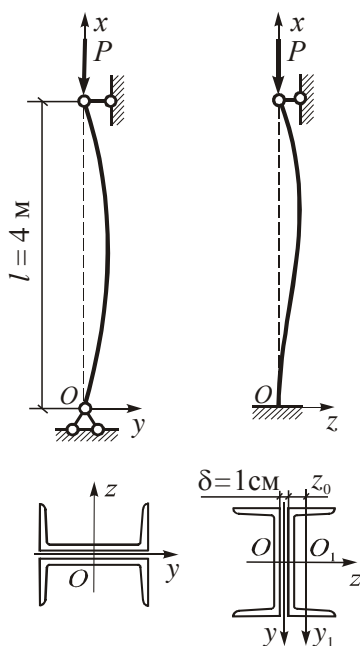


Рис.10.4

По сортаменту принимаем сечение 2[27 и выписываем необходимые геометрические характеристики сечения:  $F = 2 \cdot 35,2 = 70,4 \text{ см}^2$ ,  $i_z = 10,9 \text{ см}$ ,  $J_{y_1} = 262 \text{ см}^4$ ,  $z_0 = 2,47 \text{ см}$ .

Определим момент инерции и радиус инерции сечения относительно главной оси  $Oy$ .

$$J_y = 2[J_{y_1} + F_1(z_0 + 0,5\delta)^2] = 2[262 + 35,2(2,47 + 0,5)^2] = 1145 \text{ см}^4;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{1145}{70,4}} = 4,03 \text{ см}.$$

Вычислим приведенные длины и гибкости стержня в двух главных плоскостях:

в плоскости  $Oxy$

$$l_0 = \mu_y l = 1 \cdot 400 = 400 \text{ см}, \quad \lambda_y = \frac{l_0}{i_z} = \frac{400}{10,9} = 36,7;$$

в плоскости  $Oxz$

$$l_0 = \mu_z l = 0,7 \cdot 400 = 280 \text{ см}, \quad \lambda_z = \frac{l_0}{i_y} = \frac{280}{4,03} = 69,5;$$

Таким образом, стержень может потерять устойчивость в плоскости  $Oxz$ , в которой гибкость имеет большее значение. По таблице коэффициентов продольного изгиба для  $\lambda = 69,5$  с помощью линейной интерполяции находим

$$\varphi = 0,827 - \frac{0,827 - 0,782}{10}(69,5 - 60) = 0,784.$$

Проверяем устойчивость стержня

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{660}{70,4} = 9,38 \text{ кН/см}^2 = 93,8 \text{ МПа} < \varphi \gamma_c R = 0,784 \cdot 1 \cdot 200 = 156,8 \text{ МПа}.$$

Имеется значительный запас устойчивости. Поэтому во втором приближении примем сечение 2[20, для которого определяем

$$F = 2 \cdot 23,4 = 46,8 \text{ см}^2, \quad J_z = 1520 \cdot 2 = 3040 \text{ см}^4, \quad W_z = 2 \cdot 152 = 304 \text{ см}^3,$$

$$J_{y_1} = 113 \text{ см}^4, \quad z_0 = 2,07 \text{ см}, \quad J_y = 2(113 + 23,4 \cdot 2,57^2) = 535,1 \text{ см}^4,$$

$$i_y = \sqrt{\frac{535,1}{46,8}} = 3,38 \text{ см}, \quad \lambda_z = \frac{280}{3,38} = 82,8, \quad \varphi = 0,715.$$

Проверим выполнение условия устойчивости:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{660}{46,8} = 14,10 \text{ кН/см}^2 = 141 \text{ МПа} < \varphi \gamma_c R = 0,715 \cdot 1 \cdot 200 = 143 \text{ МПа}.$$

Условие устойчивости выполняется с небольшим запасом. Принимаем сечение 2[20. Определяем критическую силу и критические напряжения. Так как гибкость  $\lambda_z = 82,8 < 100$ , критические напряжения определим по формуле (10.5)

$$\sigma_{кр} = \sigma_T - (\sigma_T - \sigma_{пл}) \left( \frac{\lambda}{100} \right)^2 = 23 - (23 - 20) \left( \frac{82,8}{100} \right)^2 = 20,94 \text{ кН/см}^2 = 209,4 \text{ МПа}.$$

Соответствующее значение критической силы равно

$$P_{кр} = \sigma_{кр} F = 20,94 \cdot 46,8 = 980 \text{ кН}.$$

По формуле (10.7) определяем коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P_n} = \frac{980}{550} = 1,78.$$

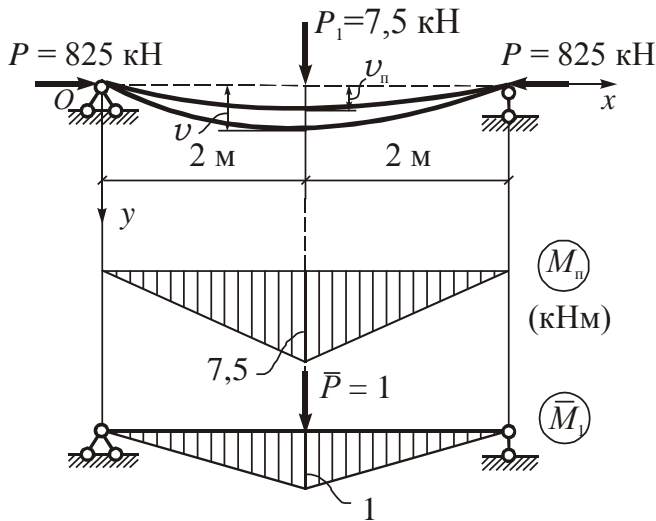


Рис.10.5

Произведем расчет стержня на прочность при продольно-поперечном изгибе в плоскости  $Oxy$  при совместном действии сжимающей силы и поперечной нагрузки (рис.10.5). Нормативные значения нагрузок равны  $P_n = 550 \text{ кН}$ ,  $P_{1н} = 5 \text{ кН}$ .

Для обеспечения заданной величины коэффициента запаса прочности по нагрузкам  $n_p = 1,5$  умножим величины нормативных нагрузок на этот коэффициент:

$$P = n_p P_n = 1,5 \cdot 550 = 825 \text{ кН}, \quad P_1 = n_p P_{1н} = 1,5 \cdot 5 = 7,5 \text{ кН}.$$

Определим наибольший изгибающий момент  $M_n$  и прогиб  $v_n$  от действия поперечной нагрузки  $P_1 = 7,5 \text{ кН}$ . На рис.10.5 приведены эпюры изгибающих моментов от действия силы  $P_1$  и единичной безразмерной силы  $\bar{P} = 1$ , приложенной в середине пролета. «Перемножая» эти эпюры по правилу Верещагина, получим

$$v_n = \frac{1}{EJ_z} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{10}{EJ_z} = \frac{10 \cdot (10^2)^3}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 3040} = 0,157 \text{ см},$$

где  $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$  – модуль упругости. Размерность длины в числителе переведена в сантиметры.

Определим критическую силу Эйлера в плоскости изгиба

$$P_{\text{э}} = \frac{\pi^2 EJ_z}{l_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 3040}{400^2} = 3934 \text{ кН}.$$

Наибольший суммарный прогиб и суммарный изгибающий момент от совместного действия сжимающей силы  $P$  и силы  $P_1$  определяются по формулам (10.9) и (10.10):

$$v = \frac{v_n}{1 - \frac{P}{P_{\text{э}}}} = \frac{0,157}{1 - \frac{825}{3934}} = 0,199 \text{ см} = 0,00199 \text{ м};$$

$$M = M_n + Pv = 7,5 + 825 \cdot 0,00199 = 9,14 \text{ кНм}.$$

Для опасного сечения стержня определяем нормальные напряжения в нижних и верхних волокнах

$$\sigma_n = -\frac{P}{F} + \frac{M}{W_z} = -\frac{825}{46,8} + \frac{9,14 \cdot 10^2}{304} = -14,62 \text{ кН/см}^2 = -146,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{F} - \frac{M}{W_z} = -\frac{825}{46,8} - \frac{9,14 \cdot 10^2}{304} = -20,63 \text{ кН/см}^2 = -206,3 \text{ МПа};$$

По формуле (10.11) производим проверку прочности по наибольшим сжимающим напряжениям:

$$|\sigma_B| = 206,3 \text{ МПа} < \sigma_T = 230 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

Эпюра нормальных напряжений в опасном сечении приведена на рис.10.6.

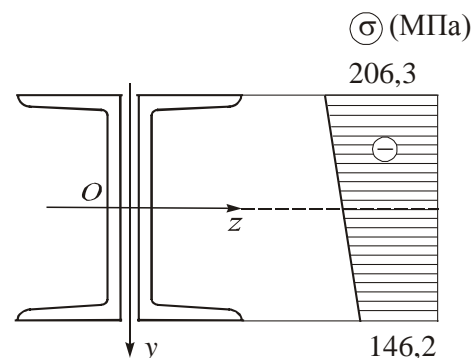


Рис.10.6

### Задача 10.2.

Центрально сжатый стержень, составленный из двух жестко соединенных между собой двутавров, имеет различные опорные закрепления в двух главных плоскостях  $Oxy$  и  $Oxz$  (рис.10.7). Материал стержня – малоуглеродистая сталь с расчетным сопротивлением  $R = 200 \text{ МПа}$  и пределом текучести  $\sigma_T = 230 \text{ МПа}$ . Нормативное значение сжимающей силы  $P_H = 380 \text{ кН}$ , коэффициент надежности по нагрузке  $\gamma_f = 1,2$ , коэффициент условий работы  $\gamma_c = 1$ .

Расчетное значение сжимающей силы равно

$$P = P_H \gamma_f = 380 \cdot 1,2 = 456 \text{ кН}.$$

Подберем сечение стержня из условия устойчивости в двух главных плоскостях.

Приняв в первом приближении коэффициент продольного изгиба равным  $\varphi = 0,5$ , определим из условия устойчивости (10.6) необходимую площадь сечения стержня:

$$F \geq \frac{P}{\varphi \gamma_c R} = \frac{456}{0,5 \cdot 1 \cdot 20} = 45,6 \text{ см}^2.$$

По сортаменту принимаем сечение  $2I18$  и выписываем необходимые геометрические характеристики:  $F = 2 \cdot 23,4 = 46,8 \text{ см}^2$ ,  $i_z = 7,42 \text{ см}$ ,  $J_{y_1} = 82,6 \text{ см}^4$ ,  $b = 9 \text{ см}$ .

Определим момент инерции и радиус инерции сечения относительно главной оси  $Oy$ .

$$J_y = 2[J_{y_1} + F_1(0,5b)^2] = 2(82,6 + 23,4 \cdot 4,5^2) = 1113 \text{ см}^4;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{1113}{46,8}} = 4,877 \text{ см}.$$

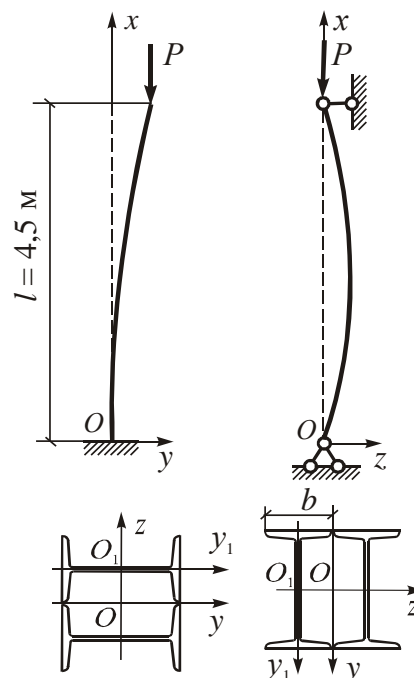


Рис.10.7

Вычисляем приведенную длину и гибкость стержня в двух главных плоскостях:

в плоскости  $Oxy$

$$l_0 = \mu_y l = 2 \cdot 450 = 900 \text{ см}, \quad \lambda_y = \frac{l_0}{i_z} = \frac{900}{7,42} = 121,3;$$

в плоскости  $Oxz$

$$l_0 = \mu_z l = 1 \cdot 450 = 450 \text{ см}, \quad \lambda_z = \frac{l_0}{i_y} = \frac{450}{4,877} = 92,3.$$

Таким образом, стержень может потерять устойчивость в плоскости  $Oxy$ , в которой гибкость имеет большее значение. По таблице коэффициентов продольного изгиба для  $\lambda = 121,3$  с помощью линейной интерполяции находим

$$\varphi = 0,479 - \frac{0,479 - 0,425}{10}(121,3 - 120) = 0,472.$$

Проверяем устойчивость стержня.

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{456}{46,8} = 9,74 \text{ кН/см}^2 = 97,4 \text{ МПа} > \varphi \gamma_c R = 0,472 \cdot 1 \cdot 200 = 94,4 \text{ МПа}.$$

Условие устойчивости не выполняется. Проверим устойчивость стержня большего сечения  $2I20$ , для которого определяем

$$F = 2 \cdot 26,8 = 53,6 \text{ см}^2, \quad J_z = 2 \cdot 1840 = 3680 \text{ см}^4, \quad W_z = 2 \cdot 184 = 368 \text{ см}^3, \\ i_z = 8,28 \text{ см}, \quad \lambda_y = \frac{900}{8,28} = 108,7, \quad \varphi = 0,545.$$

Проверка условия устойчивости в плоскости  $Oxy$  даёт следующий результат:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{456}{53,6} = 8,507 \text{ кН/см}^2 = 85,07 \text{ МПа} < \varphi \gamma_c R = 0,545 \cdot 1 \cdot 200 = 109 \text{ МПа}.$$

Условие устойчивости выполняется. Принимаем сечение  $2I20$ .

Определяем критическую силу и критические напряжения.

Гибкость  $\lambda_y = 108,7 > 100$ . Критическую силу определяем по формуле Эйлера

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_z}{l_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 3680}{900^2} = 940,7 \text{ кН}.$$

Критические напряжения равны

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{940,7}{53,6} = 17,55 \text{ кН/см}^2 = 175,5 \text{ МПа}.$$

По формуле (10.7) определяем коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P_H} = \frac{940,7}{380} = 2,47.$$

Произведем расчет стержня на прочность при продольно-поперечном изгибе в плоскости  $Oxy$  при совместном действии сжимающей силы и поперечной нагрузки (рис.10,8). Нормативные значения нагрузок равны  $P_H = 380 \text{ кН}$ ,  $q_H = 2 \text{ кН/м}$ .

Умножим величины нормативных нагрузок на коэффициент запаса по нагрузкам:

$$P = P_n \cdot n_p = 380 \cdot 1,5 = 570 \text{ кН},$$

$$q = q_n \cdot n_p = 2 \cdot 1,5 = 3 \text{ кН/м}.$$

Определим наибольший изгибающий момент  $M_n$  и прогиб  $v_n$  от действия поперечной нагрузки  $q = 3 \text{ кН/м}$ . На рис.10.8 приведены эпюры изгибающих моментов от нагрузки  $q$  и единичной безразмерной силы  $\bar{P} = 1$ , приложенной на свободном конце стержня. «Перемножая» эти эпюры по правилу Верещагина, получим:

$$v_n = \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{1}{2} \cdot 30,38 \cdot 4,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,5 - \frac{3 \cdot 4,5^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,5 \right) = \frac{153,81}{EJ_z} = \frac{153,81 \cdot (10^2)^3}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 3680} = 1,99 \text{ см}.$$

Размерность длины в числителе переведена в сантиметры.

Суммарный прогиб и суммарный изгибающий момент от совместного действия сжимающей силы  $P$  и поперечной нагрузки  $q$  определяем по формулам (10.9) и (10.10).

$$v = \frac{v_n}{1 - \frac{P}{P_3}} = \frac{1,99}{1 - \frac{570}{940,7}} = 5,05 \text{ см} = 0,0505 \text{ м};$$

$$M = M_n + Pv = 30,38 + 570 \cdot 0,0505 = 59,16 \text{ кНм}.$$

Производим по формуле (10.11) проверку прочности по наибольшим сжимающим напряжениям, возникающим в нижних волокнах стержня в сечении, совпадающем с заделкой:

$$|\sigma_n| = \left| -\frac{P}{F} - \frac{M}{W_z} \right| = \frac{570}{53,6} + \frac{59,16 \cdot 10^2}{368} = 26,71 \text{ кН/см}^2 = 267,1 \text{ МПа} > \sigma_T = 230 \text{ МПа}.$$

Условие прочности не выполняется. Принимаем сечение 2I22, для которого  $F = 2 \cdot 30,6 \text{ см}^2 = 61,2 \text{ см}^2$ ,  $J_z = 2 \cdot 2550 = 5100 \text{ см}^4$ ,  $W_z = 2 \cdot 232 = 464 \text{ см}^3$ , и производим повторный расчет:

$$v_n = \frac{153,81 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 5100} = 1,436 \text{ см};$$

$$P_3 = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 5100}{900^2} = 1303,7 \text{ кН};$$

$$v = \frac{1,436}{1 - \frac{570}{1303,7}} = 2,55 \text{ см} = 0,0255 \text{ м};$$

$$M = 30,38 + 570 \cdot 0,0255 = 44,92 \text{ кНм};$$

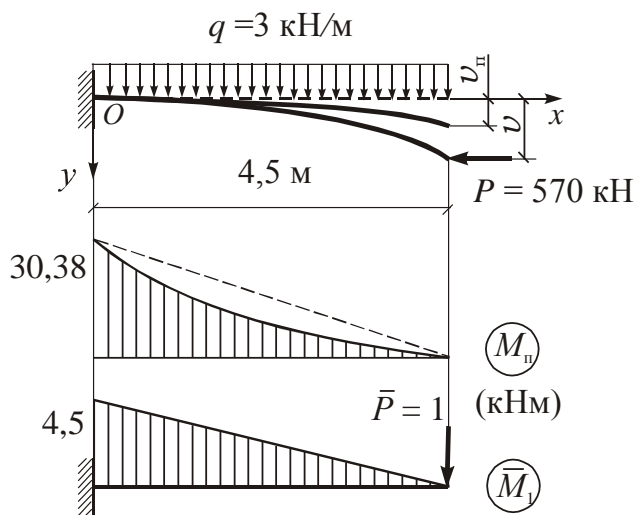


Рис.10.8

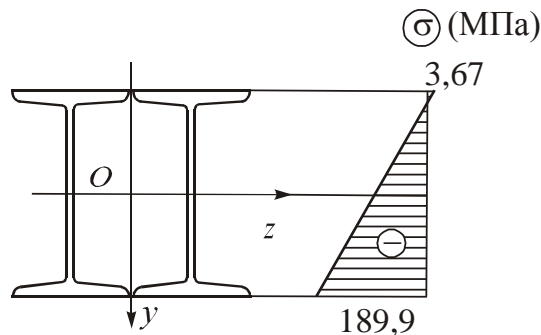


Рис.10.9

$$|\sigma_{\text{н}}| = \frac{570}{61,2} + \frac{44,92 \cdot 10^2}{464} = 18,99 \text{ кН/см}^2 = 189,9 \text{ МПа} < \sigma_{\text{т}} = 230 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

Нормальные напряжения в верхних волокнах стержня в опасном сечении равны

$$\sigma_{\text{в}} = -\frac{570}{61,2} + \frac{44,92 \cdot 10^2}{464} = 0,367 \text{ кН/см}^2 = 3,67 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений в сечении, совпадающем с заделкой, приведена на рис.10.9.

### Задача 10.3.

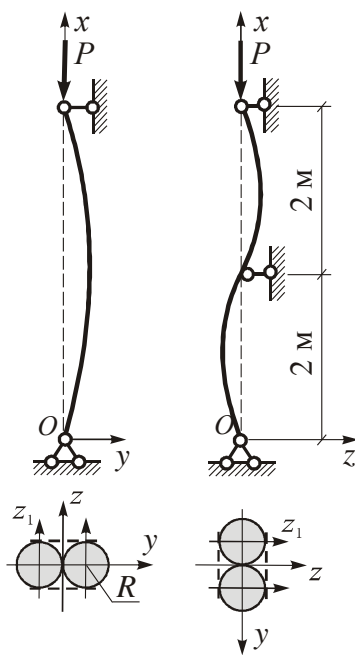


Рис.10.10

Центрально сжатый деревянный стержень, составленный из двух жёстко соединённых между собой оцилиндрованных бревен, имеет различные условия закрепления в главных плоскостях (рис.10.10). Соединение бревен схематически показано с помощью пунктирной линии. Определим, в какой плоскости может произойти потеря устойчивости стержня и выполним подбор сечения, приняв  $P_{\text{н}} = 150 \text{ кН}$ ,  $R = 1,3 \text{ кН/см}^2$ ,  $\gamma_f = 1,2$ ,  $\gamma_c = 1,0$ .

Выразим геометрические характеристики сечения через радиус круга  $R$ :

$$F = 2\pi R^2, \quad J_y = 2 \frac{\pi R^4}{4} = 0,5\pi R^4,$$

$$J_z = 2 \left( \frac{\pi R^4}{4} + R^2 \cdot \pi R^2 \right) = 2,5\pi R^4,$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{0,5\pi R^4}{2\pi R^2}} = \frac{R}{2}, \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}} = \sqrt{\frac{2,5\pi R^4}{2\pi R^2}} = \frac{R\sqrt{5}}{2}.$$

Определим гибкость стержня в главных плоскостях:

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_z} = \frac{1 \cdot 400}{R\sqrt{5}} \cdot 2 = \frac{357,8}{R}, \quad \lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_y} = \frac{0,5 \cdot 400}{R} \cdot 2 = \frac{400}{R}.$$

Поскольку  $\lambda_z > \lambda_y$ , потеря устойчивости стержня может произойти в плоскости  $Oxz$ . Определим расчетное значение сжимающей силы.

$$P_{\text{р}} = P_{\text{н}} \cdot \gamma_f = 150 \cdot 1,2 = 180 \text{ кН}.$$

Примем в первом приближении  $\varphi = 0,4$  и определим требуемую величину площади сечения:

$$F \geq \frac{P}{\varphi \gamma_c R} = \frac{180}{0,4 \cdot 1,0 \cdot 1,3} = 346,15 \text{ см}^2.$$



Определим радиус и диаметр бревен и выполним проверку устойчивости стержня в плоскости  $Oxz$ :

$$F = 2\pi R^2 = 346,15 \text{ см}^2, \quad R = 7,42 \text{ см}, \quad \lambda_z = \frac{400}{R} = \frac{400}{7,42} = 53,9.$$

По данным таблицы 10.1 для деревянных стержней определяем коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi(53,9) = 0,8 - \frac{0,8 - 0,712}{10} \cdot 3,9 = 0,766.$$

Выполняем проверку устойчивости стержня, используя формулу (10.6) в виде, рекомендованном СНиП:

$$\frac{P}{F\varphi} = \frac{180}{346,15 \cdot 0,766} = 0,679 \text{ кН/см}^2 < \gamma_c R = 1,3 \text{ кН/см}^2.$$

Условие устойчивости выполняется с излишним запасом. Желательно уменьшить размер сечения. Во втором приближении примем:

$$\varphi = \frac{0,4 + 0,766}{2} = 0,58.$$

Выполняем повторный расчет:

$$F = 2\pi R^2 \geq \frac{180}{0,58 \cdot 1,0 \cdot 1,3} = 238,7 \text{ см}^2, \quad R = 6,16 \text{ см}, \quad \lambda_z = \frac{400}{6,16} = 64,9,$$

$$\varphi(64,9) = 0,712 - \frac{0,712 - 0,612}{10} \cdot 4,9 = 0,663,$$

$$\frac{P}{F\varphi} = \frac{180}{238,7 \cdot 0,663} = 1,14 \text{ кН/см}^2 < \gamma_c R = 1,3 \text{ кН/см}^2.$$

В качестве третьего приближения выполним проверку устойчивости стержня, приняв с округлением диаметр бревен  $D = 12 \text{ см}$ ,  $R = 6 \text{ см}$ .

$$\lambda_z = \frac{400}{6} = 66,7, \quad \varphi(66,7) = 0,712 - \frac{0,712 - 0,612}{10} \cdot 6,67 = 0,645,$$

$$\frac{P}{F\varphi} = \frac{180}{2\pi \cdot 6^2 \cdot 0,645} = 1,23 \text{ кН/см}^2 < \gamma_c R = 1,3 \text{ кН/см}^2.$$

Условие устойчивости выполняется с небольшим запасом. Примем окончательно бревна диаметром  $D = 12 \text{ см}$ .

#### Задача 10.4.

Верхний сжатый пояс фермы состоит из двух жестко соединенных между собой стальных равнополочных уголков. Условия закрепления стержня в главных плоскостях одинаковые (рис.10.11). Соединение стержней схематически показано с помощью пунктирной линии.

Установим, в какой плоскости возможна потеря устойчивости стержня и выполним подбор сечения. Определим величину критической силы и коэффициент запаса устойчивости. В расчетах примем  $P_n = 300 \text{ кН}$ ,  $R = 20 \text{ кН/см}^2$ ,  $\gamma_f = 1,2$ ,  $\gamma_c = 1,0$ ,  $\sigma_T = 23 \text{ кН/см}^2$ .

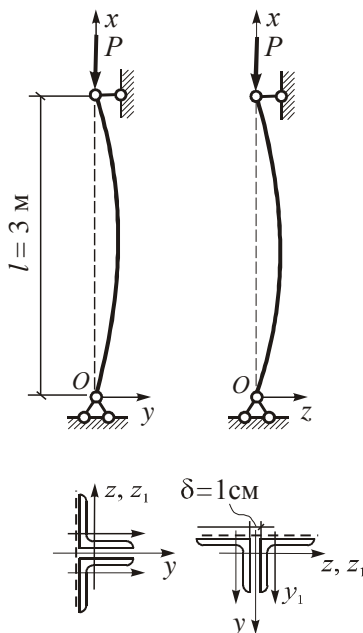


Рис.10.11

Расчетное значение сжимающей силы равно:

$$P_p = 300 \cdot 1,3 = 390 \text{ кН.}$$

Примем в первом приближении  $\varphi = 0,6$  и определим требуемое значение площади сечения стержня:

$$F \geq \frac{P}{\varphi \gamma_c R} = \frac{390}{0,6 \cdot 0,9 \cdot 20} = 36,1 \text{ см}^2.$$

По сортаменту примем сечение  $\text{Л } 100 \times 100 \times 10$ .

Геометрические характеристики равны:

$$F = 2F_1 = 2 \cdot 19,2 = 38,4 \text{ см}^2, \quad J_{y_1} = J_{z_1} = 179 \text{ см}^4,$$

$$z_0 = y_0 = 2,83 \text{ см}, \quad i_z = i_{z_1} = 3,05 \text{ см},$$

$$J_y = 2 \cdot \left[ 179 + \left( 2,83 + \frac{1}{2} \right)^2 \cdot 19,2 \right] = 783,8 \text{ см}^4,$$

$$i_y = \sqrt{\frac{783,8}{2 \cdot 19,2}} = 4,52 \text{ см.}$$

Определим значение гибкости стержня в главных плоскостях:

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_z} = \frac{1 \cdot 300}{3,05} = 98,4, \quad \lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_y} = \frac{1 \cdot 300}{4,52} = 66,4.$$

Поскольку  $\lambda_y > \lambda_z$ , потеря устойчивости стержня может произойти в плоскости  $Oxy$ . Выполним проверку устойчивости стержня в этой плоскости. По данным таблицы 10.1 для стальных стержней при  $R = 200 \text{ МПа}$  определяем коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi(98,4) = 0,665 - \frac{0,665 - 0,599}{10} \cdot 8,4 = 0,61.$$

Значение коэффициента  $\varphi$  оказалось несколько больше принятого в начале расчета. Очевидно, что условие устойчивости будет выполняться.

$$\frac{P}{F\varphi} = \frac{390}{38,4 \cdot 0,61} = 16,6 \text{ кН/см}^2 < \gamma_c R = 18 \text{ кН/см}^2.$$

Поскольку имеется небольшой запас устойчивости, выполним проверку устойчивости стержня с меньшей площадью сечения  $\text{Л } 110 \times 110 \times 8$ . Геометрические характеристики равны:

$$F = 2F_1 = 2 \cdot 17,2 = 34,4 \text{ см}^2, \quad J_{y_1} = J_{z_1} = 198 \text{ см}^4, \quad z_0 = y_0 = 3 \text{ см}, \quad i_z = i_{z_1} = 3,39 \text{ см},$$

$$\lambda_y = \frac{1 \cdot 300}{3,39} = 88,5, \quad \varphi(88,5) = 0,734 - \frac{0,734 - 0,665}{10} \cdot 8,5 = 0,675.$$

$$\frac{P}{F\varphi} = \frac{390}{34,4 \cdot 0,675} = 16,8 \text{ кН/см}^2 < \gamma_c R = 18 \text{ кН/см}^2.$$

Принимаем более рациональное в смысле расхода материала сечение  $\text{Л } 110 \times 110 \times 8$ .

Поскольку  $\lambda_y < 100$ , для определения критической силы используем эмпирическую формулу Тетмайера-Ясинского:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda = 31 - 0,114 \cdot 88,5 = 20,9 \text{ кН/см}^2, \quad P_{кр} = \sigma_{кр} F = 20,9 \cdot 34,4 = 719 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости равен:

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P_H} = \frac{719}{300} = 2,4.$$

### Задача 10.5.

Стержень в виде стальной трубы  $\varnothing 200 \times 4$  мм с одинаковыми закреплениями в главных плоскостях испытывает продольно-поперечный изгиб (рис.10.12).

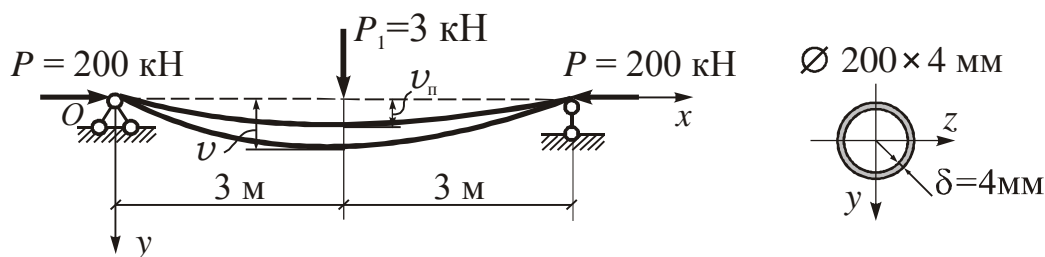


Рис.10.12

Нормативные значения нагрузок равны:  $P = P_x = 200 \text{ кН}$ ,  $P_1 = P_y = 3 \text{ кН}$ .

Выполним расчет стержня на прочность и устойчивость. В расчетах примем  $R = 20 \text{ кН/см}^2$ ,  $\gamma_f = 1,2$ ,  $\gamma_c = 1,0$ ,  $\sigma_T = 23 \text{ кН/см}^2$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$ .

Определяем геометрические характеристики сечения. Внешний и внутренний радиусы трубы равны:

$$R_2 = 20/2 = 10 \text{ см}, \quad R_1 = R_2 - \delta = 10 - 0,4 = 9,6 \text{ см}.$$

Последовательно определяем:

$$F = \pi(R_2^2 - R_1^2) = \pi(10^2 - 9,6^2) = 24,6 \text{ см}^2,$$

$$J_z = J_y = \frac{\pi}{4}(R_2^4 - R_1^4) = \frac{\pi}{4}(10^4 - 9,6^4) = 1183 \text{ см}^4,$$

$$W_z = W_y = \frac{J_z}{R_2} = \frac{1183}{10} = 118,3 \text{ см}^3, \quad i_z = i_y = \sqrt{\frac{1183}{24,6}} = 6,94 \text{ см}.$$

Вначале выполним расчет стержня на прочность в плоскости продольно-поперечного изгиба  $Oxy$ . Нормативные значения нагрузок умножим на коэффициент запаса  $n_p = 1,5$ .

$$P = 200 \cdot 1,5 = 300 \text{ кН}, \quad P_1 = 3 \cdot 1,5 = 4,5 \text{ кН}.$$

Определим величину критической силы по формуле Эйлера:

$$P_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 EJ}{l_{\text{пр}}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 1183}{(1 \cdot 600)^2} = 681 \text{ кН}.$$

Определим прогиб стержня в середине пролета от действия силы  $P_1$  по табличной формуле:

$$v_{\pi} = \frac{P_1 l^3}{48 EJ} = \frac{4,5 \cdot 600^3}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 1183} = 0,815 \text{ см.}$$

Суммарный прогиб в середине пролета определяем по приближенной формуле (10.9)

$$v = \frac{v_{\pi}}{1 - \frac{P}{P_{\Sigma}}} = \frac{0,815}{1 - \frac{300}{681}} = 1,46 \text{ см.}$$

Суммарный изгибающий момент в середине пролета равен:

$$M = M_{\pi} + \Delta M = \frac{P_1 l}{4} + P v = \frac{4,5 \cdot 600}{4} + 300 \cdot 1,46 = 11,13 \cdot 10^2 \text{ кНсм.}$$

Выполним проверку прочности стержня по сжатым волокнам:

$$|\sigma_A| = \left| -\frac{P}{F} - \frac{M}{W} \right| = \frac{300}{24,6} + \frac{11,13 \cdot 10^2}{118,3} = 12,2 + 9,4 = 21,6 \text{ кН/см}^2 < \sigma_T = 23 \text{ кН/см}^2.$$

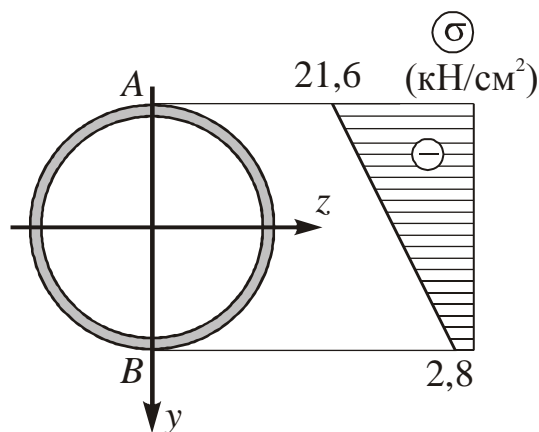


Рис.10.13

Условие прочности выполняется. Напряжения в крайних нижних волокнах стержня равны:

$$\sigma_B = -\frac{P}{F} + \frac{M}{W} = -12,2 + 9,4 = -2,8 \text{ кН/см}^2.$$

Эпюра  $\sigma$  приведена на рис.10.13.

Выполним проверку устойчивости стержня:

$$\lambda_y = \lambda_z = \frac{1 \cdot 600}{6,94} = 86,4,$$

$$\varphi(86,4) = 0,734 - \frac{0,734 - 0,665}{10} \cdot 6,4 = 0,69.$$

$$\frac{P}{F\varphi} = \frac{200 \cdot 1,2}{24,6 \cdot 0,69} = 14,1 \text{ кН/см}^2 < \gamma_c R = 20 \text{ кН/см}^2.$$

Условие устойчивости также выполняется.

Отметим, что в СНиП по стальным конструкциям рекомендуется использовать специальный метод расчета сжато-изогнутых стержней с учетом формы поперечного сечения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. М., Высшая школа, 1995.
2. Атаров Н.М. Сопротивление материалов в примерах и задачах. М., изд. ИНФРА-М, 2010.
3. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1962.
4. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: Учебник / Под ред. Г.С.Варданяна и Н.М.Атарова – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2011.
5. Варданян Г.С., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами строительной механики: Учебник / Под ред. Г.С.Варданяна. – Изд. испр. – М.: ИНФРА-М, 2011.
6. Дарков А.В, Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. М., Высшая школа, 1965.
7. Никифоров С.Н. Сопротивление материалов. М., Высшая школа, 1966.
8. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности, М., АСВ, 1998.
9. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. т.1,2. М., Наука, 1965.
10. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М., Наука, 1979.
11. Филоненко – Бородич М.М. и др. Курс сопротивления материалов. М., ГИТТЛ, ч.1, 1955, ч.2, 1956.